ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

УДК 512.622+512.816+53.072.2

Лёгенький В.И. †, *Яковенко Г.Н.* ‡
† Институт проблем математических машин и систем НАНУ
‡ Московский физико-технический институт (госуниверситет)

БЕЗРАЗМЕРЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ: ТЕОРЕТИКО–ГРУППОВОЙ ПОДХОД

Предлагается трансформация (обобщение) задачи о введении безразмерных переменных к задаче о минимально-параметрической форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами и развивается алгоритм решения этой задачи на основе теории группового расслоения.

Введение. Как может показаться из названия, в статье пойдет речь о том, как вводить безразмерные переменные. Это не совсем так. Дело в том, что введение безразмерных переменных достаточно часто воспринимается как некий промежуточный акт, позволяющий несколько упростить дальнейшие выкладки. Показательно в этом смысле замечание авторов книги [12, с.90]: "Существенным шагом в процессе преобразования модели является ее приведение к безразмерному виду. При этом часто достигается уменьшение числа параметров". Итак, что же все-таки является целью – обезразмерить переменные или уменьшить количество параметров модели? Непредвзятый взгляд на этот вопрос подсказывает, что цель состоит именно в уменьшении числа параметров, а обезразмеривание – всего лишь средство, которое позволяет в ряде случаев достичь именно такого результата. Поэтому сразу же уточним постановку задачи. Пусть задана система обыкновенных дифферен-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

циальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где t – время, x^i – фазовые координаты, $\mathbf{p} = (p^1, \ldots, p^r)$ – r-мерный вектор параметров. Наша задача будет состоять в том, чтобы указать конструктивный алгоритм введения таких новых переменных и параметров,

$$\hat{t} = \hat{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \hat{x}^i = \hat{x}^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \hat{p}^s = \hat{p}^s(\mathbf{p}), \tag{2}$$

при котором число новых параметров (s) в преобразованной модели

$$\frac{d\hat{x}^i}{d\hat{t}} = \hat{f}^i(\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}), \tag{3}$$

было бы по возможности меньше, чем в исходной: $s < r$. Иногда (см., напр., [15, стр. 42]) эту задачу называют "задачей приведения к минимально-параметрической форме".

1. Редукция модели к минимально-параметрической форме как задача группового расслоения.

Наш подход к задаче редукции будет опираться на теорию группового расслоения, основы которой были заложены еще самим С.Ли и впоследствии развиты в работах Л.В.Овсянникова [7,8] и Ю.Н. Павловского [9,10]. Существо метода состоит в том, что если исходная система дифференциальных уравнений допускает некоторую непрерывную группу преобразований G, то она (система уравнений) может быть эквивалентным образом представлена в виде разрешающей и автоморфной системы. Разрешающая система содержит только инварианты (в том числе, дифференциальные) группы G и описывает поведение фактор-множества множества решений по действию G, а автоморфная система описывает множество решений внутри классов. Корректное применение техники группового расслоения предполагает два ключевых действия: во-первых, мы

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

должны описать точно класс исследуемых объектов (т.е. зафиксировать класс анализируемых дифференциальных уравнений), а, во-вторых, ввести на этом классе отвечающее нашим целям понятие об эквивалентности (на инфинитезимальном уровне это означает зафиксировать класс операторов симметрии). Для удовлетворения первому требованию мы допишем к нашей системе (1) дополнительную систему

$$\frac{dp^j}{dt} = 0, \quad j = \overline{1, r}, \tag{4}$$

фиксирующую тот факт, что входящие в систему уравнений (1) параметры – константы. Выбор класса операторов – более сложная задача и мы остановимся на ней подробнее. На этом пути нам придется идти, по меткому выражению Р.Беллмана, "узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения"[1, стр.11]. Сразу же заметим, что наиболее общий класс точечных операторов симметрии может быть задан в виде:

$$X = \tau(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_t + \xi^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_{x^i} + \eta^j(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_{p^j}, \tag{5}$$

где (τ, ξ^i, η^j) – дифференцируемые функции указанных аргументов. Для упрощения дальнейшего анализа введем систему следующих обозначений. Во-первых, обозначив $t = x^0$, отнесем время к координатам. Тогда указанный выше оператор примет более простой вид

$$X = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_{x^i} + \eta^j(\mathbf{x}, \mathbf{p})\partial_{p^j}, \tag{6}$$

только индекс i уже будет пробегать все значения от 0 до n. Теперь различные подалгебры этой алгебры симметрий будут отличаться функциональной зависимостью коэффициентов $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$. Для удобства ссылок на эти подалгебры будем характеризовать их специальным индексом внизу оператора X, а именно: в квадратных скобках через запятую будем перечислять параметры, от которых зависят коэффициенты $\xi(\cdot), \eta(\cdot)$. Будем отмечать при этом нулевые значения коэффициентов знаком $\emptyset$ ("пустое множество").

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

Таблица 1: Подалгебры и их свойства

Обозн.	Свойства
$X_{[\mathbf{xp},\mathbf{xp}]}$	Алгебра симметрий систем (1)+(4). В общем случае – бесконечномерна. Из-за наличия в ней подалгебры $X_{[\mathbf{xp},\emptyset]}$, ее вычисление неэффективно.
$X_{[\mathbf{xp},\mathbf{p}]}$	Классическая (в смысле Л.В.Овсянникова) алгебра эквивалентностей уравнения (1). Ее вычисление может стать эффективным при вычислении симметрий ОДУ высших порядков, т.е. тогда, когда алгебра $X_{[\mathbf{xp},\emptyset]}$ становится конечномерной.
$X_{[\mathbf{xp},\emptyset]}$	Алгебра точечных симметрий уравнения (1). Коэффициенты ее операторов могут быть вычислены по первым интегралам системы (1), поэтому задача их нахождения не проще задачи интегрирования исходной системы.
$X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$	Сепарабельная алгебра (координаты x и параметры p меняются раздельно). В случае, если все параметры – существенны, – конечномерна. Наиболее известна ее подалгебра однородных растяжений, для размерных переменных ее существование гарантируется Пи-теоремой.
$X_{[\mathbf{x},\emptyset]}$	"Фазовое"ядро алгебры $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$ – допускается системой при любых значениях параметров; если параметры – "управляющие"(не существует первого интеграла, не зависящего от параметра), алгебра конечномерна.
$X_{[\emptyset,\mathbf{p}]}$	"Параметрическое"ядро алгебры $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$ – допускается системой при любых значениях фазовых координат. Ее наличие свидетельствует о "несущественности"части параметров; играет ключевую роль в т.н. проблеме "параметрической идентифицируемости".

Тогда, например, в этих обозначениях оператору (5) соответствует класс $X_{[\mathbf{xp},\mathbf{xp}]}$, оператору $X = \xi^i(\mathbf{x})\partial_{x^i} + \eta^j(\mathbf{p})\partial_{p^j}$ – класс $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$, а оператору $X = \xi^i(\mathbf{x},\mathbf{p})\partial_{x^i}$ – класс $X_{[\mathbf{xp},\emptyset]}$ и т.п.[1]

Алгоритмы вычисления и свойства различных подалгебр исследовались в связи с различными задачами – интегрируе-

[1] В работе [9] были предложены буквенные обозначения для различных подалгебр: $A_0, A, K, B, L, \ldots$, однако их ассоциативные обозначения были понятны только весьма узкому кругу специалистов.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

мости, управляемости, идентифицируемости [2–6, 8–10]. Кратко эти результаты суммированы в Табл.1.

Выявленные свойства и опыт решения прикладных задач позволяют рекомендовать следующий алгоритм группового расслоения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами:

1) Вычисляем алгебру $X_{[\emptyset,\mathbf{p}]}$ и "избавляемся"от несущественных параметров;

2) Вычисляем подалгебру однородных растяжений, гарантированную Пи-теоремой; обезразмериваем систему, тем самым уменьшая число параметров;

3) Для редуцированной системы находим алгебру $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$, по которой производится окончательное расслоение.

При небольшом количестве параметров этапы 2 и 3 могут быть объединены.

2. Пример. Рассмотрим математическую модель движения воздушного шара в вертикальной плоскости [11]. Ограничимся рассмотрением движения его центра масс под действием следующих сил: силы тяжести (G), архимедовой силы (F_A) и силы аэродинамического сопротивления (F_x). Выражения для определения сил через параметры движения и среды выражаются следующим образом:

$$G = mg, \quad F_A = gW\rho(h), \quad F_x = \frac{\rho(h)c_xS}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2.$$

В приведенных формулах приняты обозначения: h – высота подъема шара, dh/dt – вертикальная скорость, m – масса, g – ускорение свободного падения, W – объем шара, c_x – коэффициент лобового сопротивления, S – характерная площадь сопротивления (площадь Миделя). Зависимость плотности воздуха от высоты будем полагать экспоненциальной: $\rho(h) = \rho_0 e^{-\lambda h}$, где ρ_0 – плотность воздуха на нулевой высоте, λ – коэффициент. Сила тяжести направлена вниз, архимедова сила – вверх, а сила аэродинамического сопротивления всегда направлена "против движения", т.е. ее корректный учет в уравнениях движе-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

ния требует введения множителя $-sign(dh/dt)$. Однако, для наших целей этот факт не имеет принципиального значения и мы ограничимся рассмотрением только этапа подъема шара, когда сила аэродинамического сопротивления направлена вниз и, следовательно, будет учтена в уравнениях движения со знаком минус. Теперь уравнение движения может быть записано в виде:

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg + gW\rho_0 e^{-\lambda h} - \frac{\rho_0 c_x S}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 e^{-\lambda h}. \qquad (7)$$

Итак, наша модель содержит семь параметров: $m, g, W, \rho_0, c_x, S, \lambda$. Поставим задачу о приведении нашей модели к минимально-параметрической форме.

Дополнительно предположим, что воздушный шар представляет собой однородное тело радиуса R с плотностью ρ_b. Тогда величина площади, определяющая его аэродинамическое сопротивление, определится как $S = \pi R^2$, объем как $W = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}RS$, а масса, соответственно, как $m = \rho_b W = \frac{4}{3}\rho_b RS$. Теперь видно, что каждый член уравнения (7) содержит в качестве множителя величину S. С точки зрения развитой выше теории это означает, что уравнение допускает бесконечномерный оператор симметрии $X_1 = \varphi(S)\partial_S$, а сам параметр S является несущественным. Следовательно, каждый член уравнения движения может быть сокращен на величину множителя S, а само уравнение примет вид:

$$\frac{4}{3}\rho_b R\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{4}{3}\rho_b Rg + g\frac{4}{3}R\rho_0 e^{-\lambda h} - \frac{\rho_0 c_x}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 e^{-\lambda h}. \qquad (8)$$

Полученное уравнение, которое уже содержит 6 параметров, допускает два оператора из алгебры $X_{[\emptyset,\mathbf{p}]}$, а именно:

$$X_2 = \rho_b\partial_{\rho_b} + \rho_0\partial_{\rho_0}, \quad X_3 = R\partial_R + c_x\partial_{c_x}. \qquad (9)$$

Это означает, что из четырех параметров ρ_b, ρ_0, R, c_x можно образовать два существенных, которые являются инварианта-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

ми указанных операторов:

$$p_1 = \frac{\rho_0}{\rho_b}, \quad p_2 = \frac{3c_x}{8R}.$$

Переписывая уравнение (8) в виде двух уравнений (системы) первого порядка, с учетом обозначений для p_1, p_2, получим

$$\frac{dh}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = -g + gp_1 e^{-\lambda h} - p_2 p_1 V^2 e^{-\lambda h}. \tag{10}$$

В этой системе уже все четыре параметра – (g, p_1, p_2, λ) – существенны. Это означает, что дальнейшее расслоение возможно с привлечением операторов симметрии из более общего класса $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$, т.е. выполнение пунктов 2-3 предлагаемого алгоритма. Можно показать [2], что максимальной алгеброй инвариантности (симметрий) системы (10) в классе $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$ является 4-х мерная алгебра с образующими:

$$\begin{aligned} X_4 &= h\partial_h + V\partial_V - p_2\partial_{p_2} + g\partial_g - \lambda\partial_\lambda, \\ X_5 &= t\partial_t - V\partial_V - 2g\partial_g, \\ X_6 &= \partial_h + \lambda p_1 \partial_{p_1}, \\ X_7 &= \partial_t. \end{aligned} \tag{11}$$

В полученной алгебре симметрий оператор X_7 принадлежит классу $X_{[\mathbf{x},\emptyset]}$, а оставшиеся операторы X_4, X_5, X_6 могут быть использованы для дальнейшего расслоения. Операторы X_4, X_5 – это классические операторы однородных растяжений, которые могут быть получены на основе известной Пи-теоремы ("соображений размерности"): оператор X_4 – характеризует инвариантность уравнений к изменению масштаба "длины", а оператор X_5 – "времени". Попутно заметим, что к операторам

[2]Вычисление симметрий производится на основе классического алгоритма Ли; в возможности довести расчеты "до конца"принципиальной является именно "сепарабельность", т.е. различная зависимость коэффициентов искомых операторов от координат и параметров.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

алгебры тоже применимо понятие размерности: например, операторы X_4, X_5 – "безразмерные"операторы, размерность оператора $[X_7] = c^{-1}$, а $[X_4] = m^{-1}$. Этот факт может быть использован при проверке вычисленных операторов: если слагаемые оператора имеют разную размерность, то это означает, что при вычислении была допущена ошибка.

Расслоение проведем в два этапа. На первом этапе используем инварианты операторов X_4, X_5. Их можно определить так, как это принято делать в "анализе размерностей". Матрица коэффициентов операторов A ("матрица размерностей") примет вид

$$A = \begin{array}{c} \\ X_2 \Rightarrow \\ X_1 \Rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} t & h & V & p_2 & g & \lambda \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$

а матрица решений B (нуль-пространство) уравнения $Ay = 0$, соответственно, запишется в в виде:

$$B = \begin{array}{c} \\ t \\ h \\ V \\ p_2 \\ g \\ \lambda \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \hat{t} & \hat{h} & \hat{V} & \hat{p_2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Столбцы матрицы – это искомые вектора y, а элементы этих столбцов – показатели степени соответствующих координат и параметров. Инварианты операторов X_4, X_5 получаются такими:

$$\hat{t} = t\sqrt{\lambda g}, \quad \hat{h} = \lambda h, \quad \hat{V} = V\sqrt{\frac{\lambda}{g}}, \quad \hat{p_2} = p = \frac{p_2}{\lambda}.$$

Система (10) в этих переменных принимает вид:

$$\frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = \hat{V}, \quad \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = -1 + (1 - p\hat{V}^2)p_1 e^{-\hat{h}}, \qquad (12)$$

и в ней осталось только два параметра – (p, p_1). С помощью еще незадействованного оператора X_6, который в новых переменных принимает вид:

$$\hat{X}_6 = \partial_{\hat{h}} + p_1 \partial_{p_1}, \tag{13}$$

дополнительное преобразование (инвариант оператора $\hat{X}_6$) можно представить в виде

$$h^* = \hat{h} - \ln p_1 = \lambda h - \ln \frac{\rho_0}{\rho_b}, \tag{14}$$

а исходная система (7) примет окончательный вид:

$$\frac{dh^*}{d\hat{t}} = \hat{V}, \quad \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = -1 + (1 - p\hat{V}^2)e^{-h^*}, \tag{15}$$

с единственным параметром $p = \frac{3c_x}{8R\lambda}$. Поскольку параметр p не зависит от плотности заполняющего шар газа ρ_b, можно сказать, что в приведенном расслоении нам удалось отделить "форму"(т.е. размеры шара R и коэффициент c_x) от "содержания"(точнее – наполнения шара). Другими словами, для моделирования движения воздушных шаров одинакового размера, но с разными "наполнителями", достаточно использовать модель (15) с одним и тем же значением коэффициента p. Это, в известном смысле, реализует идею, высказанную в работе [16].

Заключение. По мнению авторов, алгоритм группового расслоения создает адекватную методологическую основу для решения задач приведения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами к минимально- параметрическому виду. Ключевая роль в этой процедуре принадлежит классу операторов симметрии вида $X_{[\mathbf{x},\mathbf{p}]}$, которые могут быть эффективно вычислены с помощью алгоритма Ли. Предложенный в статье алгоритм расслоения позволяет также легко акцептировать классические результаты, которые могут быть получены на основе Пи-теоремы.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. – М.: Изд–во ИЛ, 1960. – 400 с.
2. *Кунцевич А.Д., Кудашев В.Р., Спивак С.И., Горский В.Г.* Групповой анализ идентифицируемости параметров математической модели нестационарной химической кинетики // Докл. РАН – 1992 – Т. 326, № 4. – с. 658–661.
3. *Легенький В.И.* Точечные симметрии и управляемость динамических систем с управлением // Доклады НАН Украины. – 1995. – N 3. – С. 15 – 17.
4. *Легенький В.И.* О минимально–параметрической форме уравнений движения летательных аппаратов // Прикл. механика. – 1995. – N 10. – С. 81–87
5. *Легенький В.И.* Теоретико-групповой критерий редукции уравнения $G(t,x,\dot{x},\dots)+\varepsilon F(t,x,\dot{x},\dots)=0$ к виду $G(\hat{t},\hat{x},\hat{\dot{x}},\dots)=0$ // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 2, с. 94–102.
6. *Легенький В.И.* П-теорема в проблеме параметрической редукции динамических систем. - В кн.: Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики // Зб. праць Інституту математики НАН України. Т. 3, № 2. - Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. - С. 187 – 196.
7. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400с.
8. *Овсянников Л.В.* О свойстве Х-автономии // Докл. РАН. – 1993. – Т.330, N 5. – С.559-561.
9. *Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н.* Группы, допускаемые динамическими системами. - В кн.: Методы оптимизации и их приложения. – Новосибирск: Наука, 1982. – С. 155 – 189.
10. *Павловский Ю.Н.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании // Матем. моделирование, т. 3, N 6, 1991, с. 93 – 122.
11. *Рыжиков Ю.И.* Современный Фортран. - СПб.: Корона принт, 2004. – 288 с.
12. *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. – М.: Мир, 1991 – 368 с.
13. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947.

– 359 с.

14. *Яковенко Г.Н.* Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа. - М.: МЗ Пресс, 2006. – 120 с.
15. *Seshadri R., Na T.Y.* Group Invariance in Engineering Boundary Value Problems. – Springer–Verlag New York Inc., 1985. – 224 p.
16. *Sonin A. A.* A Generalization of the Π–Theorem and Dimensional Analysis. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS), Vol. 101, No. 23. (Jun. 8, 2004), pp. 8525 – 8526.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

Лёгенький Виктор Иванович. Украина, 03680, г. Киев, Проспект Глушкова, 42, Институт проблем математических машин и систем НАНУ, тел.: (044)241-05-16, e-mail: victor.lehenkyi@gmail.com

Яковенко Геннадий Николаевич. Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9, МФТИ, кафедра теоретической механики, тел.: (495)4087866, e-mail: yakovenkog@gmail.com