$\times x_6$ и $M^4(h(x)) = (x_2x_4 + x_3) \times x_6^2 \times x_5$ (здесь при выводе учтено, что $x_5 \leqslant x_5^2$ и член x_5^2 удален). Каждая компонента отображения $M^4(h)$ функционально выражается через компоненты отображения $h^{(3)}(x) = (h \times M(h) \times M^2(h) \times M^3(h))(x) = (x_2x_4 + x_6) \times (x_1x_3 + x_5) \times x_6^2 \times (x_2x_4 + x_3) \times x_5 \times x_1x_3 \times x_6$, т. е. $h^{(3)} \leqslant M^4(h)$, и следовательно, $\varphi^0 = h^{(3)}$. Упростим отображение φ^0. Так как $x_6 \leqslant x_6^2$, то сомножитель x_6^2 можно удалить из состава φ^0. Кроме того, $x_1x_3 \times x_5 \leqslant x_1x_3 + x_5$ и в итоге $\varphi^0 = (x_2x_4 + x_6) \times x_6 \times (x_2x_4 + x_3) \times x_5 \times x_1x_3$. Так как отображение φ^0 содержит пять функционально независимых компонент, а размерность пространства X равна шести, то φ^0 неинъективно и, следовательно, система Σ ненаблюдаема.

Построим минимальный образ Σ^*, для чего компонентам отображения φ^0 поставим в соответствие компоненты вектора состояния x^* : $x_1^* = x_2x_4 + x_6$, $x_2^* = x_6$, $x_3^* = x_2x_4 + x_3$, $x_4^* = x_5$, $x_5^* = x_1x_3$. Как нетрудно видеть, $y^*(k) = y(k) = x_1^*(k)$.

Найдем отображение f_1^* : $x_1^*(k+1) = x_2(k+1)\,x_4(k+1) + x_6(k+1) = x_1(k)\,x_3(k) + x_5(k) + u_1(k)\,u_2(k) = x_5^*(k) + x_4^*(k) + u_1(k)\,u_2 \times (k)$. Проведя подобные операции для других компонент вектора x^*, получим описание системы Σ^*:

$$x_1^*(k+1) = x_5^*(k) + x_4^*(k) + u_1(k)\,u_2(k), \quad x_4^*(k+1) = x_3^*(k),$$

$$x_2^*(k+1) = x_4^*(k) + u_1(k)\,u_2(k), \quad x_5^*(k+1) = u_1(k)\,u_2(k) + (x_2^*(k))^2,$$

$$x_3^*(k+1) = x_5^*(k) + u_2(k)\,x_2^*(k),$$

$$y^*(k) = x_1^*(k).$$

Убедимся в том, что система Σ^* наблюдаема, проделав необходимые вычисления и опустив промежуточные выкладки: $h^*(x^*) = x_1^*$, $M(h^*(x^*)) = x_4^* + x_5^*$, $M^2(h^*(x^*)) = (x_2^*)^2 + x_3^*$, $M^3(h^*(x^*)) = x_2^* \times x_4^* \times x_5^*$, $M^4 \times (h^*(x^*)) = (x_2^*)^2 \times x_3^* \times x_4^*$. Так как $M^4(h^*) \geqslant h^{*(3)} = x_1^* \times (x_4^* + x_5^*) \times ((x_2^*)^2 + x_3^*) \times x_2^* \times x_4^* \times x_5^*$, то $\varphi^{*0} = h^{*(3)}$. Сохраняя в φ^{*0} только функционально независимые компоненты, получим $\varphi^{*0} = x_1^* \times x_2^* \times x_3^* \times x_4^* \times x_5^*$, откуда очевидно, что φ^{*0} инъективно, т. е. система Σ^* наблюдаема.

1. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления.— М. : Наука, 1980.— 376 с.
2. *Жирабок А. Н., Шумский А. Е.* Аналитический метод синтеза схем функционального диагностирования цифровых автоматов // Электрон. моделирование.— 1987.— № 3.— С. 53—58.
3. *Голдблат Р.* Топосы. Категорный анализ логики.— М. : Мир, 1983.— 488 с.
4. *Hartmanis I., Stearns R.* Algebraic Structure Theory of Seguential Machines.— N. Y. : Prentice — Hall I nc., 1966.— 216 p.
5. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем.— М. : Мир, 1971.— 400 с.

Дальневосточ. политехн. ин-т

Получено 22.02.91

УДК 681.51

В. И. ЛЕГЕНЬКИЙ

СИММЕТРИИ И ПРОБЛЕМА РЕДУКЦИИ В СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается проблема получения точных решений в задачах синтеза оптимальных управлений для гладких динамических систем. С позиций теории симметрии дается сравнительный анализ классического формализма Р. Беллмана, предполагающего решение задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби и теоретико-группового формализма, в котором синтезирующая функция определяется в результате решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью.

Предметом настоящего исследования является классическая задача синтеза оптимального управления для динамической системы вида

$$\dot{x}^i = f^i(x, t, u), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $x \in X \subset R^n$; $t \in T = [t_0, t_k]$; $u \in U \subset R$; f — дифференцируемая требуемое число раз по t, x и u функция. На траекториях системы (1) задан функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f^0(t, x, u)\, dt \tag{2}$$

и поставлена задача синтеза: определить закон оптимального управления, обеспечивающий перевод системы (1) из области начальных значений $G(t, x)$ на заданное граничное многообразие

$$\Gamma = \{x = x_k, t = t_k\}. \tag{3}$$

Предположим, что система (1) управляема в смысле [1, с. 209—210], а оптимальные значения управляющего воздействия являются внутренней точкой множества допустимых управлений U, т. е. выполняется включение

$$u_{\text{opt}} \subset \operatorname{Int} U. \tag{4}$$

Под решением задачи синтеза обычно понимается [2, с. 58] определение закона управления (синтезирующей функции), т. е. отображения $u : X \times T \to U$.

Теоретический и практический интерес в рассмотрении такой задачи связан со следующими обстоятельствами. Во-первых, знание синтезирующей функции позволяет считать задачу оптимального попадания в начало координат (граничные условия здесь не существенны) математически решенной до конца [3]. Во-вторых, при нахождении оптимальных поведений для многошаговых процессов очень часто определение следующего хода через текущее состояние процесса дает во многих отношениях более простую, естественную и даже более важную часть информации, чем определение полной последовательности ходов в оптимальном поведении, которые надо осуществлять, начиная с некоторого фиксированного начального положения [4]. Несмотря на полезность и высокую разрешающую способность понятия закона управления, в общем случае задача синтеза (т. е. вопрос о существовании синтезирующей функции и ее отыскании) не решена [3].

В рассматриваемой постановке ((1) — (4)) вопрос существования не имеет приоритетного значения, поэтому целесообразно сосредоточить усилия на конструктивной стороне вопроса, т. е. указать алгоритм определения синтезирующей функции. В этом отношении настоящая работа является продолжением исследований [5, 6]. В этих работах было выявлено, что само понятие «синтезирующей функции» требует определенного расширения (обобщения). Действительно, с геометрической точки зрения соответствие между множеством точек пространства состояний (x, t) и управляющим воздействием u можно определить как «управляющее многообразие». Аналитическое описание такого многообразия может состоять в задании регулярного отображения $F : M \to T$, где $M \subset R^{n+p+1}$, $T \subset R^p$, $p \subset \mathbb{N}$. Другими словами, управляющее многообразие $(\mathcal{U})$ определяется как множество общих нулей некоторого набора гладких функций $F = (F_1, \ldots, F_p)$, $F_j = F_j(t, x, u, z^1, \ldots, z^p)$, где число дополнительных переменных z так согласовано с числом задающих функций F_j, чтобы выполнялось условие [16, с. 115]

$$\dim \mathcal{U} = n + 1. \tag{5}$$

При таком обобщении определение управляющего воздействия для каждого реализовавшегося состояния $\{t, x\}$ ведет к решению системы алгебраических уравнений.

Алгоритм определения закона управления традиционно связывают с методом динамического программирования Р. Беллмана [4]. При этом на основе предложенного Р. Беллманом функционального соотношения

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\max_{u\in U}\left(f^0+f^i\frac{\partial V}{\partial x^i}\right), \tag{6}$$

где $V=\int\limits_t^{t_k} f^0(t,\ x,\ u)\,dt$ — функция Беллмана, конструируются инженерные методики решения задачи синтеза [7, с. 217]. Для рассматриваемой постановки задачи из (6) следуют соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial t}+f^i\frac{\partial V}{\partial x^i}+f^0=0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial u}\cdot\frac{\partial V}{\partial x^i}+\frac{\partial f^0}{\partial u}=0. \tag{8}$$

Из уравнения (8) определяется зависимость

$$u=u\left(t,\ x,\ \frac{\partial V}{\partial x}\right), \tag{9}$$

которая после подстановки в (7) приводит к уравнению **типа Гамильтона — Якоби — Беллмана**

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t,\ x,\ \frac{\partial V}{\partial x}\right)=0\quad (H\text{-гамильтониан}), \tag{10}$$

надлежащее решать с граничным условием

$$V(t_k,\ x_k)=0. \tag{11}$$

Подставляя найденное решение $V(t,\ x,\ t_k,\ x_k)$ в уравнение (9), получают искомый закон управления. Недостатки такого алгоритма проанализированы в работе [5]. Наиболее существенный из них состоит в том, что применение этого метода требует нахождения не только оптимальных управлений, но и функции $V(t,\ x)$, поскольку она входит в соотношение (6) [8].

Было бы неверно отождествлять идею принципа оптимальности и метод динамического программирования с указанным выше алгоритмом, который является лишь одной из возможных реализаций этого метода. Р. Беллман говорил, что динамическое программирование — не столько собрание каких-то аналитических методов, сколько состояние разума [9]. Основное функциональное уравнение, следствием которого является (6), выражает полугрупповые свойства решений системы дифференциальных уравнений. Более сложное введение в теорию непрерывных многошаговых процессов может быть построено при помощи непрерывных групп преобразований — теории Софуса Ли [10]. В связи с этим представляется естественным подойти к синтезу законов управления на основе более глубокого понимания групповых свойств уравнений (7), (8). Вводя обозначения

$$x^0=f^0(x,\ t,\ u),\qquad t\equiv x^{n+1}, \tag{12}$$

соотношения (7), (8) можно переписать в следующем виде:

$$L_1V=\left(\frac{\partial}{\partial t}+f^i\frac{\partial}{\partial x^i}+f^0\frac{\partial}{\partial x^0}\right)V=0; \tag{13}$$

$$L_2V=\left(\frac{\partial f^i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial f^0}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^0}\right)V=0. \tag{14}$$

Такая запись позволяет интерпретировать функцию Беллмана как совместный инвариант операторов L_1 и L_2 [11, с. 113]. Используя свойства полных систем операторов и условие единственности, которому должна удовлетворять функция Беллмана, в [5] развит алгоритм сведения задачи синтеза закона управления к решению задачи Коши для уравнений в частных производных относительно функций F_j, определяющих управляющее многообразие $\mathcal{U}$. Алгоритм состоит из следующих этапов [5].

1. Система (13), (14) пополняется, для чего n раз выполняется процедура коммутирования ($[.,.]$ — коммутатор):

$$L_k = [L_{k-1}, L_1], \quad k = \overline{3, n+2}. \tag{15}$$

2. Определитель матрицы коэффициентов операторов L_k ($k = \overline{1, n+2}$) приравнивается к нулю (условие линейной связанности), и полученное соотношение представляется в виде

$$u^{(n)} = \Phi(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}). \tag{16}$$

3. От соотношений (1) и (16), которые рассматриваются совместно, делается переход к эквивалентной системе дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\begin{aligned} &L_1 u = u_1, \\ &L_1 u_1 = u_2, \\ &\cdots\cdots \\ &L_1 u_{n-1} = \Phi(t, x, u, u_1, \ldots, u_{n-1}), \end{aligned} \tag{17}$$

решение которой с граничным условием (3) определяет управляющее многообразие. Система (17) является системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка с одинаковой главной частью [12, с. 1389—1398], причем для ее решения необходимо определить характеристики, т. е. найти первые интегралы системы (1), (16). Решение последней задачи, как и решение уравнения Беллмана, может быть получено, если известна достаточно широкая группа симметрий. В случае уравнения Беллмана отыскивается группа преобразований пространства $T \times X \times R \subset R^{n+2}$ [13], [14], а в случае системы (1), (16) — пространства $T \times X \times R^n \times R \subset R^{2n+2}$, так как наряду со временем t и фазовыми координатами x преобразуются управление u и все его производные $\dot{u}, \ddot{u}, \ldots, u^{(n-1)}$. Тот факт, что при нахождении операторов симметрии уравнения Беллмана используют преобразования пространства меньшей размерности, является несколько ограничивающим как в смысле общности описания управляющего многообразия $\mathcal{U}$, так и в смысле использования свойств симметрии исходной системы (13), (14). Дело в том, что, осуществив редукцию системы (17), (18) к уравнению Гамильтона — Якоби — Беллмана (10), невозможно использовать преобразования управляющего воздействия, а также связанные с ним симметрии. Напротив, во втором случае свойства симметрии сохраняются, причем этот факт может оказаться решающим при аналитическом исследовании проблемы. К сожалению, исследование симметрии в обоих случаях приводит к системе определяющих уравнений, число которых на единицу меньше, чем число неизвестных функций (коэффициентов инфинитезимальных операторов) [11]. Поэтому сравнительный анализ удобнее проводить на конкретных примерах.

Пример. Рассмотрим скалярное линейное нестационарное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = a(t)\, x + b(t)\, u, \tag{17}$$

где $x \in R$; $t \in [t_0, t_k]$; $u \in R$; $[a(t),\ b(t)] \in C^{\infty}_{[t_0, t_k]}$. Для (17) заданы функционал качества

$$J = \int_{t_0}^{t_k} (\delta(t)\, x^2 + \beta(t)\, u^2)\, dt, \quad (\delta(t), \beta(t)) \in C^{\infty}_{[t_0, t_k]} \tag{18}$$

и граничное многообразие

$$\Gamma = \{x = x_k,\ t = t_k\}. \tag{19}$$

Параллельно с задачей (17) — (19) с произвольными функциями ($\delta(t)$, $\beta(t)$, $a(t)$, $b(t)$) рассмотрим частный случай для следующих спецификаций:

$$\begin{aligned} &a(t) = -1; \quad b(t) = t + 1; \quad \delta(t) = \exp 0{,}5\,(t+1)^2; \\ &\beta(t) = (t+1) \exp 0{,}5\,(t+1)^2. \end{aligned} \tag{20}$$

В задачах (17) — (20) необходимо определить закон управления $u = u(t, x)$. Заметим, что постановка задачи не требует определения оптимальных траекторий. Соответствующие им дифференциальные уравнения, по-видимому, проще всего получить, воспользовавшись возможностью сведения задачи (17) — (19) к минимизации функционала без дифференциальных связей. Действительно, выражая управление u из (17) и подставляя в (18), приходим к задаче минимизации функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_k} L(t, x, \dot{x})\, dt,$$

$$\text{где } L = x^2\left(\delta(t) + \frac{\beta(t)\, a^2(t)}{b(t)}\right) - 2x\dot{x}\,\frac{a(t)\,\beta(t)}{b^2(t)} + \frac{\beta(t)}{b^2(t)}\,\dot{x}^2. \quad (21)$$

Используя уравнение Эйлера — Лагранжа [15], имеем выражение

$$\ddot{x} + \dot{x}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} - 2\frac{\dot{b}}{b}\right) - x\left[\dot{a} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}a - 2a\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\delta b^2}{\beta} + a^2\right] = 0, \quad (22)$$

которое для спецификации (20) примет вид

$$\ddot{x} + \frac{t(t+2)}{t+1}\,\dot{x} - \frac{t+2}{t+1}\,x = 0. \quad (23)$$

Ограниченность в использовании такого подхода в более общих задачах определяется возможностью сведения исходной задачи к задачам вариационного исчисления без дифференциальных связей.

Для решения задачи синтеза воспользуемся (13), (14), в соответствии с которыми функция Беллмана $V(t, x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (ax + bu)\frac{\partial V}{\partial x} + (\delta x^2 + \beta u^2) = 0; \quad (24)$$

$$b\frac{\partial V}{\partial x} + 2\beta u = 0. \quad (25)$$

Пользуясь традиционным алгоритмом, придем к уравнению Беллмана

$$\frac{\partial V}{\partial t} + ax\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{b^2}{4\beta}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \delta x^2 = 0, \quad \beta \neq 0. \quad (26)$$

В соответствии с общей теорией [7, с. 220], решение уравнения (26) следует искать (независимо от спецификации (20)) в виде

$$V(t, x) = \frac{1}{2}R(t)\,x^2 + g(t)\,x + r(t), \quad (R(t), g(t), r(t)) \in C^{\infty}_{[t_0, t_k]}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов $R(t)$, $g(t)$, $r(t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial t} + aR - \frac{b^2}{4\beta}R^2 + \delta = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + ag - \frac{b^2}{2\beta}Rg = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{b^2 g^2}{4\beta} = 0.$$

Первое уравнение из (28) является уравнением типа Риккати, которое в общем случае симметрией не обладает. Спецификация функций (20) видимых упрощений в (28) не привносит, поэтому необходимо остановить дальнейшие аналитические исследования. Этот результат, полученный традиционным способом, известен: определение законов управления для линейных нестационарных систем с квадратичными функционалами приводит к необходимости решения уравнения типа Риккати [7, с. 228]. Теперь воспользуемся предложенным выше алгоритмом. Для соответствующих уравнениям (24) и

25) операторов

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (ax + bu)\frac{\partial}{\partial x} + (\delta x^2 + \beta u^2)\frac{\partial}{\partial x^0}; \tag{29}$$

$$L_2 = b\frac{\partial}{\partial x} + 2\beta u\frac{\partial}{\partial x^0} \tag{30}$$

имеем

$$L_3 = [L_2, L_1] = (ab - \dot b)\frac{\partial}{\partial x} + (2\delta bx - 2u\dot\beta - 2\beta\dot u)\frac{\partial}{\partial x^0}. \tag{31}$$

Условие линейной связанности операторов L_1, L_2, L_3 приводит к соотношению

$$\dot u = \gamma(t)x + \eta(t)u, \tag{32}$$

$$\text{где}\quad \gamma(t) = \frac{\delta(t)}{\beta(t)}b(t);\quad \eta(t) = \frac{\dot b(t)}{b(t)} - \frac{\dot\beta(t)}{\beta(t)} - a(t). \tag{33}$$

Для спецификаций (20) уравнение (32) принимает вид

$$\dot u = x - tu. \tag{34}$$

Ассоциированный с системой (17), (32) оператор —

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + (ax + bu)\frac{\partial}{\partial x} + (\gamma x + \eta u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{35}$$

а задача синтеза сведена к решению задачи Коши для уравнения

$$X\Phi = 0 \tag{36}$$

относительно функции $\Phi(t, x, u)$, неявно определяющей управляющее многообразие. Примечательно, что для любых спецификаций функций $a(t)$, $b(t)$, $\gamma(t)$, $\eta(t)$ для оператора (35) существует оператор симметрии

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u},\quad [X, X_1] = 0, \tag{37}$$

т. е. система (17), (32) инвариантна относительно однопараметрической группы растяжений $(t, x, u) \to (t, \lambda x, \lambda u)$, где $\lambda \in R$. Используя инвариант группы $z = \frac{u}{x}$ для подстановки $(x, u) \to (x, z)$, можно редуцировать систему (36) к решению обыкновенного дифференциального уравнения типа Риккати для z:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 1 + (1 - t)z - (1 + t)z^2, \tag{38}$$

но оно не обладает симметрией, и возникшая ситуация аналогична (хотя и несколько проще) классическому подходу. Однако для спецификаций (20) оператор

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + (-x + (t + 1)u)\frac{\partial}{\partial x} + (x - tu)\frac{\partial}{\partial u} \tag{39}$$

имеет дополнительную однопараметрическую группу симметрий с оператором

$$X_2 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}. \tag{40}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$[X_1, X_2] = -X_2,$$

т. е. операторы X_1, X_2 порождают разрешимую двухмерную группу Ли [[16, с. 210], причем редукцию следует начинать, используя инварианты оператора X_2 ($y = x - ut$). Подстановка $(u, x) \to (u, y)$ приводит (17), (34) к виду

$$\dot u = y,$$
$$\dot y = -y(t + 1), \tag{41}$$

первые интегралы которого (с учетом уравнения $\dot{t} = 1$ и переобозначений) имеют вид

$$(x - ut)\exp(0{,}5(t+1)^2) = C_1,$$
$$u - C_1\int_0^t \exp(-0{,}5(t+1)^2)\,dt = C_2. \tag{42}$$

Решая с помощью (42) задачу Коши (36), получим синтезирующую функцию

$$u(t, x) = \frac{A(t)\,x\exp(0{,}5(t+1)^2) - x^k\exp(0{,}5(T+1)^2)}{A(t)\,t\exp(0{,}5(t+1)^2) - T\exp(0{,}5(T+1)^2)}, \tag{43}$$

где $A(t) = T\exp(0{,}5(T+1)^2)\int_t^T \exp(-0{,}5(t+1)^2)\,dt + 1.$

Таким образом, возможность аналитического решения задачи (17) — (20) связана со спецификацией функций $a(t)$, $b(t)$, $\delta(t)$, $\beta(t)$, что порождает наличие у системы нетривиальных групп симметрий. Использование предложенного алгоритма в полной мере способствует выявлению структуры решения (34) и осуществлению процедуры редукции при аналитическом решении задачи синтеза.

Автор выражает признательность И. В. Петренко, А. В. Руденко и Г. Н. Яковенко за обсуждение результатов работы.

1. *Вахрамеев С. А., Сарычев А. В.* Геометрическая теория управления // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1985.— 23.— С. 197—280.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем.— М. : Мир, 1971.— 400 с.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.— М. : Наука, 1983.— 392 с.
4. *Беллман Р.* Динамическое программирование.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 400 с.
5. *Легенький В. И.* Теоретико-групповой алгоритм решения задач синтеза оптимального управления // Кибернет. и вычисл. техника.— 1991.— Вып. 91.— с. 41—48.
6. *Легенький В. И.* Синтез оптимального управления гладкими динамическими системами как задача группового анализа // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 40—43.
7. *Горбатенко С. А., Макашов Э. М., Полушкин Ю. Ф., Шефтель Л. В.* Расчет и анализ движения летательных аппаратов.— М. : Машиностроение, 1971.— 352 с.
8. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления.— М. : Наука, 1968.— 408 с.
9. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией.— М. : Наука, 1964.— 360 с.
10. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления.— М. : Наука, 1969.— 120 с.
11. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
12. *Елкин В. И.* Общее решение систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Диф. уравнения.— 1985.— № 8.— С. 1389—1398.
13. *Павлов В. Г., Чепрасов В. П.* К построению некоторых инвариантных решений уравнения Беллмана // Автомат. и телемех.— 1968.— № 1.— С. 38—44.
14. *Павлов В. Г.* Построение некоторых инвариантных решений в частной задаче аналитического конструирования регуляторов // Там же.— 1972.— № 6.— С. 192—195.
15. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.— М. : Наука, 1969.— 424 с.
16. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.— М. : Мир, 1989.— 639 с.

Киев. высш. воен. авиацион. инж. уч-ще

Получено 2.04.91