УДК 681.51

В. И. ЛЕГЕНЬКИЙ

ПРИЛОЖЕНИЯ ГРУПП ЛИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ САМОЛЕТА

Возможность описания движения центра масс самолета системой обыкновенных дифференциальных уравнений — с одной стороны, и развитие алгебраических методов их исследования [1], концепции условной симметрии таких уравнений [2] — с другой, позволяют решать прикладные задачи динамики полета на единой теоретико-групповой основе. Ранее эти методы применялись автором к решению вариационных задач динамики полета [3] и проблеме синтеза оптимальных регуляторов [4]. В настоящей работе алгебраические структуры естественно возникают при решении задач программного управления.

Для целенаправленного изменения летательным аппаратом своего положения в пространстве (выполнения маневра) движение его центра масс должно быть определенным образом запрограммировано. При наличии программы движения летчик или система автоматического управления, вырабатывая соответствующие управляющие воздействия, должны обеспечивать выполнение заданной программы, т. е. осуществлять, в соответствии с терминологией [5], программное регулирование. При формировании программ движения нас прежде всего интересует их количество и «качество» (представление программы). Для определенности будем рассматривать продольное движение самолета, представленное системой дифференциальных уравнений в безразмерных переменных вида

$$\dot{h} = V \sin\theta, \tag{1}$$

$$\dot{L} = V \cos\theta, \tag{2}$$

$$\dot{V} = P - c_x(\alpha) V^2 - \sin\theta, \tag{3}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{V}\left(c_y(\alpha) V^2 - \cos\theta\right), \tag{4}$$

где: (h — высота полета, L — дальность, V — скорость, θ — угол наклона траектории) — фазовые координаты; (P — тяга, α — угол атаки) — управления. Вопрос о количестве программ движения решается достаточно просто: их должно быть не больше, чем управляющих функций в системе уравнений движения [6], т. е. в данном случае не больше двух. Это могут быть временные программы изменения управляющих функций ($P(t)$, $\alpha(t)$) или некоторые соотношения между координатами и управлениями (например: $P=f(V)$, $\theta=\Phi(t)$). Кроме того, одна и та же программа может быть представлена в различных эквивалентных формах. Так как программное движение должно быть инвариантно относительно представления программы [7, с. 17], то эквивалентность программ может пониматься в следующем смысле: две программы считаются эквивалентными, если они порождают одно и тоже решение системы (1)—(4). Другими словами, если характеризовать управляемый процесс кривой в $(m+n+1)$-мерном пространстве $R^{m+n+1}(X\subset R^n,\ U\subset R^m)$, то эквивалентность программ означает эквивалентность соответствующих дифференциально-геометрических описаний этой кривой. Возникает вопрос о наилучшем в определенном смысле представлении программы. Понятие «наилучшее» должно конкретизироваться условиями ее реализации. Так, при реализации программы движения системой автоматического управления представление программы может зависеть от имеющейся измерительной и управляющей аппаратуры, наличия в контуре управления вычислительной машины и других факторов.

Однако программа, вполне пригодная для реализации системой автоматического управления, может оказаться совершенно непригодной для реализации летчиком-оператором. Именно попытки «приспособить» традиционные параметрические программы движения вида $c_y(t)$, $V(t)$, $h(t)$ нашли отражение в соответствующих инструкциях по пилотированию, что привело к следующим негативным последствиям:

— при выполнении быстротечных маневров летчику приходится контролировать значительное количество параметров полета, большинство из которых непрерывно изменяется (высота, скорость, т. д.). Как следствие, повышается операционная напряженность летчика и снижается уровень безопасности полета [8, 9];

— ошибка в выдерживании заданных значений перегрузки (или коэффициента подъемной силы) проявляются к концу маневра «интегрально» (например, ошибка в выдерживании перегрузки Δn_y связана с ошибкой изменения угла наклона траектории приближенной зависимостью $\Delta\theta\approx(\Delta n_y t)/V$, т. е. растет со временем). Следствием этого является неправильное построение летчиком маневра и значительные отклонения от заданных конечных условий.

Для повышения качества пилотирования необходимо при разработке программы движения руководствоваться, как это показано в работах [8, 9], принципом стационарности операторской деятельности и следующим из него принципом стационарности динамических свойств информации [8, с. 147]. Реализация этого принципа предполагает с одной стороны, уменьшить количество контролируемых «обобщенных» координат, а с другой — обеспечить их постоянство, т. е. по существу переключить деятельность летчика с функции регулирования одних координат, на функцию стабилизации других. Частные исследования этой проблемы проводились, например, в работах [10, 11]. Для рассмотрения задачи в общей постановке сформулируем следующее предложение.

Предложение 1. Для реализации принципа стационарности операторской деятельности заданные программы движения должны быть представлены летчику-оператору как первые интегралы соответствующих реализаций уравнений движения (1)—(4).

Обоснованность такого предложения следует из следующего определения:

Определение 1 [14]. Первым интегралом динамической системы вида

$$\dot{x}^i = f^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad i = 1, n, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad t \in [t_0, t_k], \quad \mathbf{u} \in R^m \tag{5}$$

называется функция $\omega(t, \mathbf{x})$ сохраняющая постоянное значение на каждом решении $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$.

При заданных управляющих воздействиях вопрос о количестве первых интегралов устанавливается следующей теоремой:

Теорема 1 [12]. В окрестности неособой точки система (5) имеет $(n-1)$ функционально независимых первых интегралов.

Приведенная теорема является локальной, т. е. справедливой в некоторой окрестности $V \in R^n$. Глобальный аналог этой теоремы нуждается в замене слов «имеет $(n-1)$» словами «может иметь не более, чем $(n-1)$». Вопрос о существовании и способах определения глобальных первых интегралов связан с изучением групп симметрий исходной системы (5).

Определение 2 [14]. Группа (6) называется группой симметрии системы (5), если замена переменных

$$\hat{\mathbf{x}} = q(t, \mathbf{x}, a), \qquad \hat{t} = \varphi(t, \mathbf{x}, a), \tag{6}$$

такая, что в новых переменных система (5) имеет прежний вид.

С системой (1)—(4) можно ассоциировать линейный дифференциальный оператор первого порядка, являющийся оператором полного дифференцирования по времени в силу уравнений (1)—(4):

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + V \sin\theta \frac{\partial}{\partial h} + V \cos\theta \frac{\partial}{\partial L} + (n_x - \sin\theta)\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{V}(n_y - \cos\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{7}$$

где $n_x = P - c_x V^2$, $n_y = c_y V^2$.

В общем случае вопрос о вычислении групп симметрии может быть изучен на алгебраическом уровне — по допускаемым оператором (7) операторам симметрии вида

$$X = \tau(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{8}$$

Определение 3. Оператор (8) допускается системой (5), если выполняется соотношение

$$[X, X_0] = \lambda(\mathbf{x}) X_0, \tag{9}$$

где $[.]$ — коммутатор операторов, $\lambda(\mathbf{x})$ скалярная функция.

Симметрийные свойства системы (1)—(4) зависят от того, функцией каких переменных является управляющее воздействие. Это вопрос выбора, который при постановке задачи, как правило, постулируется (например, в работе [14] принято $u = u(t)$). Однако, совершенно очевидно, что изменение характера функциональной зависимости управляющей функции от фазовых координат системы (независимо от «спецификации») может существенным образом сказаться на допускаемых операторах. Поэтому, если достаточных априорных оснований для «назначения» характера функциональной зависимости $u(x^i)$ нет, решающим фактором для такого выбора могут стать групповые свойства соответствующих реализаций.

Перейдем к рассмотрению примера. Пусть для летательного аппарата программное движение состоит в выполнении изоэнергетического маневра в вертикальной плоскости (например, петли Нестерова [10]). Требование изоэнергетичности, по существу уже дает одно условие: $n_x = 0$, т. е. на траектории движения должно выполняться соотношение:

$$h_э = h + \frac{V^2}{2g} = C_1 = \text{const}, \tag{10}$$

где $h_э'$ — энергетическая высота. При допущении, что маневр выполняется при незначительном перепаде высот $\rho(h) = \mathrm{const}$, соотношение (10) можно переписать (после умножения на ρg) в виде:

$$P_{\text{полн}} = P_{\text{ст}} + P_{\text{дин}} = \tilde{C}_1, \tag{11}$$

где $P_{\text{полн}}$, $P_{\text{ст}}$, $P_{\text{дин}}$ — соответственно: полное, статическое и динамическое давление. Другими словами, для выполнения изоэнергетического маневра летчику-оператору необходимо так управлять ручкой управления двигателем, чтобы поддерживать (контролируя показания прибора) постоянное полное давление $P_{\text{полн}}$.

Другое соотношение, обеспечивающее выполнение петли, состоит в задании коэффициента подъемной силы. Но в каком виде представить эту зависимость: в виде $c_y(t)$, $c_y(V)$ или $c_y(\theta)$? Подойдем к решению этого вопроса с теоретико-групповых позиций.

Для ассоциированного с системой (3)—(4) оператора X_0

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{V}(c_y V^2 - \cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{12}$$

будем искать оператор симметрии в виде:

$$L_1 = \xi^0(t, V, \theta)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t, V, \theta)\frac{\partial}{\partial V} + \xi^2(t, V, \theta)\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{13}$$

который может быть представлен так

$$L_1 = \xi_0 X_0 + X^*, \tag{14}$$

где

$$X^* = \eta^1(t, V, \theta)\frac{\partial}{\partial V} + \eta^2(t, V, \theta)\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{15}$$

$$\eta^1 = \xi^1 + \xi^0 \sin\theta, \quad \eta^2 = \xi^2 - \xi^0 \frac{1}{V}(c_y V^2 - \cos\theta),$$

т. е. алгебра инвариантности операторов L_1 содержит бесконечномерный идеал, определяемый операторами $\xi^0 X_0$ и фактор-алгебру операторов X^*, для которых в силу условия (9) должно выполняться соотношение:

$$[X_0, X^*] = 0. \tag{16}$$

Так как симметрийные свойства оператора X_0 зависят от функции $c_y(\cdot)$, в первую очередь постараемся определить такие операторы симметрии, которые не зависят от спецификации этой функции. Заметим, что оператор X_0 можно представить в виде

$$X_0 = X_1 + c_y X_2, \tag{17}$$

где $X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial V} - \frac{1}{V}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$, $X_2 = V\frac{\partial}{\partial\theta}$.

Тогда условию (16) будет соответствовать система условий

$$[X_1, X^*] = 0, \quad [X_2, X^*] = 0, \quad [X_3, X^*] = 0, \tag{18}$$

где $X_3 = [X_1, X_2] = -V\cos\theta\frac{\partial}{\partial V} + 2\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$.

Последнее соотношение следует из первых двух и тождества Якоби:

$$[[X_1, X_2], X^*] + [[X_2, X^*], X_1] + [[X^*, X_1], X_2] = 0. \tag{19}$$

Выполняя коммутирование, для определения коэффициентов η^1, η^2 получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial\eta^1}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\eta^2}{\partial\theta} = \frac{1}{V}\eta^1, \quad \frac{\partial\eta^1}{\partial V} = \frac{1}{V}\eta^1 - \mathrm{tg}\,\theta\eta^2,$$

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial V} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\theta}{V^2}\eta^1 - \frac{2}{V}\eta^2,$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial t} - \sin\theta\frac{\partial \eta^1}{\partial V} + \cos\theta\eta^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial t} - \sin\theta\frac{\partial \eta^2}{\partial V} - \frac{\cos\theta}{V}\frac{\partial \eta^2}{\partial \theta} - \frac{\cos\theta}{V^2}\eta^1 - \frac{\sin\theta}{V}\eta^2 = 0. \qquad (20)$$

Проверка условий вполне интегрируемости [15] для системы (20) приводит к тривиальному результату:

$$\eta^1 = \eta^2 = 0, \qquad (21)$$

т. е. допускается только нулевой оператор (тождественное преобразование.

Следовательно, оператор X_0 не допускает нетривиальных операторов симметрии, не зависящих от спецификации функции c_y. Теперь обратим внимание на то, что коэффициенты оператора X_0 не зависят от времени. Поэтому, если дополнительно предположить, что и функция c_y не зависит от времени $(\partial_t c_y = 0)$, то оператор X_0 будет допускать оператор симметрии вида $X_1^* = \mu(X_0 - \partial_t)$, $\mu = \mathrm{const}$, а, следовательно, и оператор $L = \partial_t$, которому соответствует группа сдвигов $\hat{t} = t + a$. Дальнейшее исследование симметрии возможно только для редуцированной (по найденной группе сдвигов) системы с оператором

$$Z_0 = Y_1 + c_y Y_2, \qquad (22)$$

где

$$Y_1 = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial V} - \frac{1}{V}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad (23)$$

$$Y_2 = V\frac{\partial}{\partial \theta}. \qquad (24)$$

По отношению к исходной системе искомая симметрия является условной [2] («almost symmetry» — в терминологии работ [16, 17].) Для системы (23)—(24) будем искать соответственно оператор симметрии вида

$$R = \tau^1\partial_V + \tau^2\partial_\theta, \qquad (25)$$

причем в качестве дополнительного условия потребуем, чтобы оператор R допускался Z_0 независимо от спецификации функции $c_y(V, \theta)$. Условие симметрии в данном случае примет вид

$$[Z_0, R] = \nu(V, \theta) Z_0, \qquad (26)$$

которое с учетом (22) расщепляется на два условия

$$[Y_1, R] = \nu(V, \theta) Y_1, \qquad (27)$$

$$[Y_2, R] = \nu(V, \theta) Y_2. \qquad (28)$$

Из (28) следует, что

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial \theta} = 0, \qquad (29)$$

$$\nu = \frac{\partial \tau^2}{\partial \theta} - \frac{\tau^1}{V}. \qquad (30)$$

Подставляя (30) в (27) и выполняя необходимые преобразования, дополнительно получим

$$\sin\theta\frac{\partial \tau^1}{\partial V} - \tau^2\cos\theta = \left(\frac{\partial \tau^2}{\partial \theta} - \frac{\tau^1}{V}\right)\sin\theta, \qquad (31)$$

$$\sin\theta\frac{\partial \tau^2}{\partial V} + \frac{2\cos\theta}{V^2}\tau^1 + \frac{\sin\theta}{V}\tau^2 = 0. \qquad (32)$$

Дальнейшая стратегия в исследовании уравнений (31) и (32) такова: используя условие (29) после дифференцирования (31) и (32) по θ мы избавимся от переменной τ^1, а для полученной системы двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно τ^2 используем условие вполне интегрируемости [15]. Опуская промежуточные преобразования, в результате получим условие:

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial V} = -\frac{\tau^2}{V}, \tag{33}$$

которое после подстановки в (32) приведет к выводу, что $\tau^1 = 0$, а для τ^2 из (31) будем иметь

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial \theta} = -\tau^2 \operatorname{ctg} \theta. \tag{34}$$

Можно заметить, что для (33), (34) условия вполне интегрируемости выполнены

$$\frac{\partial^2 \tau^2}{\partial V \partial \theta} = \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial \theta \partial V} = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{V} \tau^2, \tag{35}$$

и возможно найти общее решение:

$$\tau^2 = \frac{1}{V \sin \theta}, \tag{36}$$

т. е. система (23) — (24) допускает оператор:

$$R = \frac{1}{V \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{37}$$

Следовательно, исходная система (12) Ли-инвариантна относительно оператора сдвига $\frac{\partial}{\partial t}$ и условно-инвариантна относительно оператора (37). При этом выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$[X_0, \partial_t] = 0, \quad [R, \partial_t] = 0, \quad [X_0, R] = \frac{\cos \theta}{V \sin^2 \theta} X_0 - \frac{\cos \theta}{V \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial t}. \tag{38}$$

Проведенный анализ показал, что максимально широкая группа симметрий допускается в случае, когда $c_y = c_y(V, \theta)$. Используем эти симметрии для решения системы (3) — (4). Группа симметрий по времени позволяет от уравнений (3), (4) перейти к уравнению:

$$\frac{\partial \theta}{\partial V} = \frac{c_y(V) V^2 - \cos \theta}{-V \sin \theta}. \tag{39}$$

Для упрощения уравнения (39), используя симметрию (37), введем новые переменные (ω^1 и ω^2) в соответствии с уравнениями [15]:

$$R\omega^1 = 0, \quad R\omega^2 = 1, \tag{40}$$

т. е. переменная ω^1-инвариант оператора R и так как $\frac{\partial \omega^1}{\partial \theta} = 0$, то $\omega^1 = \omega^1(V)$ — произвольная функция скорости полета, а для определения ω^2 имеем соотношение:

$$\frac{1}{V \sin \theta} \frac{\partial \omega^2}{\partial \theta} = 1, \tag{41}$$

решением которого является $\omega^2 = V \cos \theta$. Поэтому, выбирая замену переменных в виде: $V_x = V \cos \theta$, $W = V^3/3$, преобразуем (39) к простейшему виду

$$\frac{dV_x}{dW} = c_y(V_x, W), \tag{42}$$

для которого несложно выбрать такие зависимости $c_y(V_x, W)$, при которых уравнение (42) интегрируется.

Например:

а) $c_y = C = \text{const}$ (впервые этот случай рассмотрен в [13] Н. Е. Жуковским), тогда:

$$V_x - \frac{c_{y0}V^2}{3} = V_x - \frac{1}{3} V n_y = C_1; \tag{43}$$

б) $c_y = c_{y0} - kV$ (этот случай имеет место при полете на максимально-допустимых значениях c_y, которые уменьшаются со скоростью полета):

$$V_x - \frac{c_{y0}V^3}{3} + \frac{kV^4}{4} = V_x - \frac{1}{3} n_y V - \frac{kV^4}{12} = C_2; \tag{44}$$

в) $n_y(V) = C = \text{const}$:

$$V_x - n_y V = - V^2\dot{\theta} = C_3. \tag{45}$$

Как известно [10], при выполнении петли летчик комбинирует различные программы. По виду первых интегралов (43)—(45) может быть рекомендована такая программа:

$$kV_x - n_y V = C, \tag{46}$$

где k-переменный (по режиму полета) коэффициент. Соотношение (46) может быть использовано также для формирования показаний директорного прибора.

В. І. Легенький

ПРИКЛАДАННЯ ГРУП ЛІ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРОГРАМНОГО КЕРУВАННЯ ПОЛЬОТОМ ЛІТАКА

Резюме

Розглядається проблема представлення програми руху літального апарата при виконанні її льотчиком-оператором. Запропоновано формувати такі програми за першими інтегралами відповідних реалізацій рівнянь руху. Проблема визначення перших інтегралів пов'язана із задачею вибору функціональних залежностей керуючих впливів від фазових координат і розглядається засобами групового аналізу. Як приклад розглянуто задачу програмування петлі Нестерова.

V. I. Legenky

APPLICATION OF THE LIE GROUPS TO SOLUTION OF PROBLEMS ON A PROGRAM CONTROL OVER A PLANE FLIGHT

Summary

A problem on representation of the motion program of a flying vehicle under its realization by the pilot-operator is considered. It is suggested to form such programs by first integrals of corresponding realizations of the motion equations. The problem on determination of the first integrals is connected with the problem on a choice of the functional dependences.

1. *Кухтенко А. И., Семенов В. Н., Удилов В. В.* Геометрические и абстрактно-алгебраические методы в теории автоматического управления // Кибернетика и вычисл. техника.— 1975.— Вып. 27.— С. 3—20.
2. *Фущич В. И.* Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 11.— С. 1456—1470.
3. *Легенький В. И.* Групповые методы в вариационных задачах динамики полета // Вопросы повышения эффективности и качества систем управления полетом и навигации ВС.— Киев : КИИГА, 1990.— С. 83—87.
4. *Легенький В. И.* Теоретико-групповой алгоритм решения задач синтеза оптималь-

ного управления // Кибернетика и вычисл. техника.— 1991.— Вып. 91.— С. 41—46.
5. *Теория* управления: Терминология.— М. : Наука, 1988.— Вып. 107.—56 с.
6. *Бойчук Л. М.* Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления.— М. : Энергия, 1971.— 112 с.
7. *Коренев Г. В.* Введение в механику управляемого тела.— М. : Наука, 1964.— 568 с.
8. *Павлов В. В.* Начала теории эргатических систем — Киев : Наук. думка, 1975.— 240 с.
9. *Кондратенков В. А.* Эргономический аспект безопасности полетов. — Киев : КВВАИУ, 1989.— 140 с.
10. *Петров А. М., Кондратенков В. А., Пшенецкий С. П.* Способ управления самолетом при выполнении вертикального маневра // Мат. физика и нелинейная механика.— 1988.— Вып. 9(43).— С. 26—29.
11. *Тараненко В. Т., Момджи В. Г.* Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета.— М. : Машиностроение, 1986.— 128 с.
12. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1975.— 240 с.
13. *Жуковский Н. Е.* О парении птиц // Собр. соч.— Т. 4.— М.— Л. : Гостехтеориздат, 1949.— С. 5—34.
14. *Павловский Ю. Н., Яковенко Г. Н.* Группы, допускаемые динамическими системами // Методы оптимизации и их приложения. — Новосибирск : Наука, 1982. — С. 155—189.
15. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований.— М. : ИЛ,— 1947.— 359 с.
16. *Sherring J., Prince G.* Geometric aspects of reduction of order // Univ. of New England Research Report, 1990.— 20 p.
17. *Basarab-Horwath P.* A note on Lie's generalizations of Jacobi's multiplier and integrability by quadratures // Univ. of Linkoping, Research Report, 1990.— 10 p.

г. Киев

УМЖ, 1992, №10 *Получено 21.08.92*