Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 19

МАТЕМАТИЧНА ФІЗИК

УДК 519.46:681.51

В. И. ЛЕГЕНЬКИЙ

ТОЧЕЧНЫЕ СИММЕТРИИ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. И. Фущичем)

1. Формализация. Как известно (см., например, [1]), понятие точечных симметрий для обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}^i = f^i(t, x), \ i = \overline{1, n} \qquad (1)$$

может быть сформулировано двояко: либо в терминах решений системы (1) — преобразования симметрии переводят решения системы (1) в ее же решения, либо как характеризация самой системы (1) — преобразования симметрии сохраняют ее вид.

В отличие от (1) динамическая система с управлением (ДСУ) представляется в виде

$$\dot{x}^i = f^i(t, x, u(\cdot)) \qquad (2)$$

и характеризуется наличием в правых частях некоторых независимых функций $u(\cdot)$ — управлений, целенаправленный выбор которых и способствует осуществлению желаемых движений ДСУ. Понятно, что групповые свойства системы (2) определяются не только ее видом, но и содержательной интерпретацией функции $u(\cdot)$. Известно несколько подходов. Так, в работах [2, 3] система (2) интерпретируется как система, параметризованная некоторыми $u = \mathrm{const}$, из ее области значений $(u \subset W)$ и осуществляется переход от системы (2) к некоторой эквивалентной системе векторных полей, для которых применимы стандартные методы группового анализа. Ограниченность такого подхода связана с тем, что, во-первых, групповым преобразованиям подвергаются только время t и координаты x^i, а, во-вторых, невозможно исследовать ДСУ, в уравнения которых управляющее воздействие входит дифференциальным образом.

Другим подходом, изложенным в работе [4], является интерпретация управляющего воздействия как функции времени — $u = u(t)$ (программное управление), что позволило вовлечь в преобразование и управляющие воздействия (см. также [5, 6]), однако и здесь внимание было сосредоточено только на «симметриях по состоянию» (в терминологии работы [5]).

В то же время, при решении прикладных задач возникает необходимость в представлении управляющего воздействия как функции времени и фазовых координат $u(t, x)$ (управление с обратной связью). В этом случае проблемы концептуального плана возникают уже на этапе определения для системы (2) зависимых и независимых переменных. Действительно, если считать t независимой переменной, а x — зависимой, то u уже нельзя считать зависимой переменной в том же смысле как x. Для преодоления выявленного несоответствия целесообразно перейти от системы (2) к эквивалентному представлению ДСУ в виде

$$\mathcal{F} = \frac{\partial s}{\partial t} + f^i(t, x, u)\frac{\partial s}{\partial x^i} = 0. \qquad (3)$$

В соотношении (3) время t и фазовые координаты x^i являются независимыми переменными, а функции s и u — зависимыми, причем они уже «уравнены в правах» в том смысле, что зависят от одной и той же совокупности переменных: $u(t, x)$ и $s(t, x)$. Подчеркнем еще раз, что (3) — дифференциальное соотношение с двумя (а в случае m управлений с $(m+1)$) неизвестными функциями, поэтому любая пара $u(t, x)$ и $s(t, x)$, удовлетворяющая (3), формально может считаться «решением» (3).

Определение. Дифференциальное соотношение (3) допускает группу G точечных преобразований

$$\hat{t} = \sigma(t, x, u, s, a), \quad \sigma|_{a=0} = t;$$

$$\hat{x}^i = \rho^i(t, x, u, s, a), \quad \rho^i|_{a=0} = x^i;$$

$$\hat{s} = \chi(t, x, u, s, a), \quad \chi|_{a=0} = s;$$

$$\hat{u} = \varkappa(t, x, u, s, a), \quad \varkappa|_{a=0} = u,$$

если дифференциальное многообразие $\mathcal{F} = 0$ (3) инвариантно относительно продолженной группы $G_{(1)}$.

Если u — скаляр, то оператор полного дифференцирования имеет $(n+1)$ составляющую и i-тая составляющая имеет вид

$$D_i = \partial_i + u_i\partial_u + s_i\partial_s, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{4}$$

С помощью операторов полного дифференцирования обычным образом определяется первое продолжение соответствующего группе G инфинитезимального оператора

$$X = \tau(t, x, u, s)\,\partial_t + \xi^i(t, x, u, s)\,\partial_{x^i} + \\ + \eta(t, x, u, s)\,\partial_s + \varphi(t, x, u, s)\,\partial_u, \tag{5}$$

и условие инвариантности принимает вид

$$\underset{(1)}{X}\,\mathcal{F}\,|_{\mathcal{F}=0} = 0. \tag{6}$$

2. Анализ определяющих уравнений. Управляемость.

Соотношение (3) имеет определенную структуру, а именно:

1) в (3) несколько зависимых переменных (незамкнутая система);

2) управляющие воздействия u входят в (3) функциональным образом, в то время как s — дифференциальным;

3) функции f^i не зависят от s.

Перечисленные особенности позволяют не ограничиваться в групповом анализе соотношения (3) общим условием (6), а исследовать его в развернутом виде с целью получения более содержательных результатов. Для дальнейшего анализа потребуется оператор

$$X_0 = \partial_t + f^i(t, x, u)\,\partial_{x^i}, \tag{7}$$

с помощью которого соотношение (3) принимает вид

$$X_0 s = 0. \tag{8}$$

Напомним, что требование вполне управляемости эквивалентно отсутствию таких решений (3) $s_0(t, x)$, при которых (3) удовлетворяется для любых $u(t, x)$. Проверку этого факта, как указано в работе [6, с. 5; 8], можно осуществить исследуя полноту системы

$$X_0 s = 0, \quad Us = 0, \quad U \equiv \frac{\partial}{\partial u}. \tag{9}$$

Проанализируем условие (6). Продолженный оператор группы имеет вид

$$\underset{(1)}{X} = X + \zeta_t\partial_{s_t} + \zeta_i\partial_{s_i} \tag{10}$$

и не содержит членов с ∂_{u_i}, так как (3) не содержит производных u_i. Действуя продолженным оператором на соотношение (3), получим

$$(Xf^i)\,s_i + \zeta_t + f^i\zeta_i\,|_{\mathcal{F}=0} = 0, \quad s_i = \frac{\partial s}{\partial x^i}. \tag{11}$$

Коэффициенты (ζ_t, ζ_i) будем вычислять с одновременным переходом на многообразие $\mathcal{F}$, который удобно осуществлять здесь, используя соотношение $s_t = -f^i s_i$:

$$\begin{aligned} \zeta_t &= D_t(\eta) - s_t D_t(\tau) - s_j D_t(\xi^j) = \\ &= D_t(\eta) + (f^j D_t(\tau) - D_t(\xi^j))\,s_j, \\ \zeta_i &= D_i(\eta) + (f^j D_i(\tau) - D_i(\xi^j))\,s_j. \end{aligned} \tag{12}$$

Выражение (11) с учетом (12) принимает вид

$$(Xf^j)\,s_j + D_t(\eta) + (f^j D_t(\tau) - D_t(\xi^j))\,s_j + \\ + f^i(D_i(\eta) + (f^j D_i(\tau) - D_i(\xi^j))\,s_j). \tag{13}$$

Расщепив (13) по s_j, имеем:

$$D_t(\eta) + f^i D_i(\eta) = 0, \tag{14}$$

$$Xf^j + f^j(D_t(\tau) + f^i D_i(\tau)) - \\ - (D_t(\xi^j) + f^i D_i(\xi^j)) = 0. \tag{15}$$

Раскрыв (14) с учетом (7), получим условия

$$X_0\eta = 0, \quad U\eta = 0, \tag{16}$$

а соотношение (15) приведет к условиям

$$Xf^j + f^j X_0 \tau - X_0 \xi^j = 0, \tag{17}$$

$$f^j U \tau - U \xi^j = 0. \tag{18}$$

Соотношения (16)—(18) представляют собой систему определяющих уравнений относительно неизвестных $(\tau, \xi^j, \eta, \varphi)$. Из (16) следует, что η может произвольным образом зависеть от s, что отражает линейность соотношения (3), а зависимость η от t и x^j с точностью совпадает с условиями для определения управляемости (7). Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. ДСУ вида (2) управляема тогда и только тогда, когда (3) не допускает ни одного оператора симметрии вида

$$X = \eta \partial_s, \ \eta = \eta(t, x^j). \tag{19}$$

Если (3) допускает конечное число $m < n$ функционально-независимых операторов симметрии $X_1, X_2, \dots, X_m$, то соотношения вида

$$\eta_1 = C_1, \ \eta_2 = C_2, \dots, \eta_m = C_m, \ C_i = \mathrm{const} \tag{20}$$

задают уравнения инвариантных многообразий движения ДСУ.

Изучим подгруппу GE группы G с инфинитезимальной образующей вида

$$X = \tau(t, x) \partial_t + \xi^j (t, x) \partial_{x^j} + \varphi (t, x, u) \partial_u. \tag{21}$$

Интересно отметить, что если интерпретировать (3) как некоторое уравнение с произвольным элементом $u(t, x)$, то искомая группа GE формально совпадает с группой эквивалентностей уравнения (3) [7, с. 80]. Однако ее подгруппа GE_0 с образующей

$$Y = \tau(t, x) \partial_t + \xi^j (t, x) \partial_{x^j} \tag{22}$$

оказывается различной при различных интерпретациях $u(t, x)$.

1. Если $u(t, x)$ — произвольный элемент, то алгебра инвариантности соотношения (3) в классе операторов вида (22) целиком определяется произвольным элементом (так как при составлении определяющих уравнений в них войдут и различные производные u_i, что приведет в случае вполне управляемых систем к тому, что ядро основных групп будет пусто).

2. Если же $u(t, x)$ — зависимая переменная, то соотношение (3) может допускать некоторую алгебру операторов вида (22), так как в этом случае при подсчете производных от правых частей (1) вида $\partial f^j / \partial x^k$ дифференцировать u по x^k не требуется.

Совпадения возможны только в частных случаях, когда управляющее воздействие зависит от тех фазовых координат, которые не подвергаются групповым преобразованиям. Например, в общем случае операторов (22) соответствующие алгебры инвариантности совпадают только в том случае, если u может принимать только постоянные (хотя и разные) значения. Другой пример: когда постулирована зависимость u только от времени $u = u(t)$, а на операторы (22) наложено дополнительное условие $\tau(t, x) = 0$ (т. е. время не преобразуется) и т. д.

Вернемся к нашей основной интерпретации $u(t, x)$ как дополнительной зависимой переменной соотношения (3). В отличие от общего случая группы точечных преобразований G, которая, как правило, оказывается бесконечномерной, для группы GE_0 справедлив следующий результат.

Теорема 2. Алгебра инвариантности L_0 вполне управляемой системы (2) в классе операторов вида (22) имеет конечную размерность

$$\dim L_0 \leqslant n + 2, \tag{23}$$

где $n = \dim M$ — размерность пространства состояний.

Доказательство этого факта аналогично приведенному в [6].

Таким образом, предложенная интерпретация ДСУ для случая, когда $u = u(t, x)$, позволила навести простую связь (теоремы 1, 2) между симметриями ДСУ и фактом ее управляемости.

1. *Фущич В. И.* О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретико-групповые методы в математической физике.— Киев : Ин-т математики АН Украины.— 1978.— С. 5—44.
2. *Geometric* methods in system theory.— Dordrecht; Boston: Reidel, 1973.— 238 p.
3. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики.— Киев : Наук. думка, 1988.— 272 с.
4. *Павловский Ю. Н., Яковенко Г. Н.* Группы, допускаемые динамическими системами // Методы оптимизации и их приложения.— Новосибирск : Наука, 1982.— С. 155—189.
5. *Яковенко Г. Н.* Симметрии по состоянию в системах с управлением // Прикладная механика и математика : (Межвед. сб.).— М. : МФТИ, 1992.— С. 155—176.
6. *Вольф З. С., Зайцев В. Ф., Яковенко Г. Н. и др.* Современный групповой анализ : методы и приложения. Симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений.— Л., 1990.— 39 с.— (Препр. / ЛИИАН; № 130).
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 399 с.
8. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований.— М. : Изд-во иностр. лит., 1947.— 359 с.

Получено
23.02.94

The notion of point symmetry is generalized to the case of a feedback control: $u = u(t, x)$. Sufficient conditions of noncontrollability of dynamic systems in terms of their invariance algebras are obtained.