Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 167–176

УДК 517.977.1

Групповая классификация управляемых систем второго порядка

В.И. ЛЁГЕНЬКИЙ †, ***И. РУДОЛЬФ*** ‡

† *Институт проблем моделирования в энергетике, Киев, Украина*
E-mail: Lehenkyi@yahoo.com

‡ *Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie TU Dresden, Germany*
E-mail: Rudolph@erss11.et.tu-dresden.de

Розв'язано задачу группової класифікації для керованих систем другого порядку із скалярною функцією керування.

A group classification problem for single-input control systems of second order is solved.

1. Вводные замечания. Постановка задачи. Как известно, многие свойства управляемых систем — управляемость, наблюдаемость, декомпозируемость, приводимость к наперед заданному виду — носят инвариантный характер, а, следовательно, имеют теоретико-групповую природу и могут быть выявлены с использованием алгоритма Ли.

К настоящему времени выполнено значительное количество исследований по анализу конкретных управляемых систем. В то же время исследований, выполненных в самой общей постановке, достаточно мало. Под "общностью" будем понимать произвол в спецификации правых частей дифференциальных уравнений управляемой системы. Объект наших исследований — система вида

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= f^1\left(t, x^1, x^2, u^1, \ldots, u^r\right), \\ \dot{x}^2 &= f^2\left(t, x^1, x^2, u^1, \ldots, u^r\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где (x_1, x_2) — фазовые координаты, $\left(u^1, \ldots, u^r\right)$ — управления, t — время, а $\left(f^1(\cdot),\ f^2(\cdot)\right)$ — произвольные аналитические функции указанных аргументов. Сделаем несколько замечаний относительно системы (1):

1) систему (1) и систему, полученную из нее невырожденной заменой фазовых координат $\hat{x} = \varphi(t, x)$, времени $\hat{t} = \tau(t, x)$ а также управлений $\hat{u} = \lambda(t, x, u)$ будем считать (локально) *эквивалентными*;

2) в силу введенного понятия эквивалентности, рассмотрение систем с числом управляющих воздействий больше трех $(r \geq 3)$ сводится к системам с двумя управляющими воздействиями (остальные управления оказываются “несущественными”, а системы — “несущественно различными”; детали см. в [2]);

3) при $r = 2$ система (1) локально эквивалентна простейшей системе
$$\frac{dx^1}{dt} = \hat{u}^1, \qquad \frac{dx^2}{dt} = \hat{u}^2,$$
где $\hat{u}^1 = f^1\left(t, x^1, x^2, u^1, u^2\right)$, $\hat{u}^2 = f^2\left(t, x^1, x^2, u^1, u^2\right)$; так что рассмотрение систем второго порядка с двумя управляющими воздействиями (так же, как и систем n-го порядка с n управлениями) не представляет интереса;

4) при $r = 1$ в качестве новой управляющей функции в системе (1) можно, например, выбрать
$$\hat{u} = f^2\left(t, x^1, x^2, u\right).$$

Таким образом, без потери общности, задача групповой классификации для системы второго порядка со скалярным управлением может быть сформулирована (в соответствии с [1]) так: *для класса дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= F\left(t, x^1, x^2, u\right), \\ \dot{x}^2 &= u \end{aligned} \tag{2}$$

найти ядро основных групп GE_0 и указать все специализации произвольного элемента $F(\cdot)$, дающие расширение группы GE_0.

2. Управляемость. Как будет видно из дальнейшего, важным свойством, приводящим к сужению допускаемой группы, является управляемость системы (2), поэтому остановимся на этом свойстве подробнее.

Под управляемостью системы (2) будем понимать отсутствие у нее инвариантных поверхностей вида $\omega\left(t, x^1, x^2\right) = C$.

Для получения спецификаций функции $F\left(t,x^1,x^2,u\right)$, соответствующих условию неуправляемости, заметим, что наличие инвариантов $\omega\left(t,x^1,x^2\right)=C$ можно рассматривать как существование нетривиальных решений системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+F\left(t,x^1,x^2,u\right)\frac{\partial\omega}{\partial x^1}+u\frac{\partial\omega}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial u}=0, \tag{3}$$

где первое уравнение означает, что ω должна быть первым интегралом системы (2), а второе условие означает, что этот первый интеграл не должен зависеть от управления u. Если ввести обозначения

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t}+F\left(t,x^1,x^2,u\right)\frac{\partial}{\partial x^1}+u\frac{\partial}{\partial x^2},\qquad U=\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

систему (3) можно переписать в виде

$$X_0\omega=0,\qquad U\omega=0. \tag{5}$$

Для решения вопроса о количестве функционально-независимых решений системы (5), ее надо подвергнуть процедуре пополнения — подсчитать коммутаторы операторов (4) и исследовать их на линейную связанность. Последовательно будем иметь

$$\begin{aligned}
X_1&=[U,X_0]=F_u\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^2},\\
X_2&=[U,X_1]=F_{uu}\frac{\partial}{\partial x^1},\\
X_3&=[X_0,X_1]=(F_{ut}+FF_{ux^1}+uF_{ux^2}-F_uF_{x^1}-F_{x^2})\frac{\partial}{\partial x^1},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор операторов, $F_u=\partial F/\partial u,\ldots$. Наличие первых интегралов означает одновременное выполнение условий линейной связанности систем операторов $\{U,X_0,X_1,X_2\}$ и $\{U,X_0,X_1,X_3\}$. В первом случае это приводит к обращению в нуль определителя матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&F&u\\0&0&F_u&1\\0&0&F_{uu}&0\end{vmatrix}=F_{uu}=0, \tag{7}$$

а во втором — к выполнению условия

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & F & u \\ 0 & 0 & F_u & 1 \\ 0 & 0 & F_{ut} + FF_{ux^1} + uF_{ux^2} - F_u F_{x^1} - F_{x^2} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Из условий (7), (8) следует, что система (2) становится неуправляемой только при тех значениях F, которые удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &F_{uu} = 0, \\ &F_{ut} + FF_{ux^1} + uF_{ux^2} - F_u F_{x^1} - F_{x^2} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Из первого уравнения (9) следует, что функция F линейна по u, т.е.

$$F = \alpha\left(t, x^1, x^2\right) u + \beta\left(t, x^1, x^2\right), \tag{10}$$

где $\alpha\left(t, x^1, x^2\right)$, $\beta\left(t, x^1, x^2\right)$ — произвольные функции. Подставляя (10) во второе уравнение системы (9), получим

$$\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 1. *Система (2) неуправляема тогда и только тогда, когда* $F = \alpha\left(t, x^1, x^2\right) u + \beta\left(t, x^1, x^2\right)$, *а для коэффициентов* α, β *выполняется условие (11).*

Доказать теорему 1 можно также с использованием техники дифференциальных форм. Действительно, исключая из системы (2) управление u в соответствии с условием (10), получим уравнение Пфаффа

$$\Omega = dx^1 - \alpha\left(t, x^1, x^2\right) dx^2 - \beta\left(t, x^1, x^2\right) dt = 0.$$

Условие интегрируемости дифференциальной формы вида

$$d\Omega \wedge \Omega = 0$$

приводит в точности к соотношению (11).

Пример 1. Линейная система с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &\dot{x}^1 = a_1 x^1 + a_2 x^2 + bu, \\ &\dot{x}^2 = u \end{aligned}$$

становится неуправляемой (в соответствии с (11)) при выполнении соотношения $ba_1 + a_2 = 0$. Действительно, после исключения u, получается уравнение Пфаффа

$$dx^1 - bdx^2 + a_1 \left(bx^2 - x^1\right) dt = 0,$$

решение которого можно получить в виде

$$\left(bx^2 - x^1\right) e^{-a_1 t} = C.$$

3. Групповая классификация. Сразу же заметим, что так как функция F зависит от всех переменных, ядро основных групп пусто. Поэтому мы начинаем анализ с построения определяющих уравнений. Коэффициенты $\tau\left(t, x^1, x^2, u\right)$, $\xi^i\left(t, x^1, x^2, u\right)$, $\varphi\left(t, x^1, x^2, u\right)$ инфинитезимального оператора симметрий

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \varphi\frac{\partial}{\partial u} \tag{12}$$

определяются условий [2]

$$\begin{aligned} &Xf^i - X_0\xi^i + f^i X_0\tau = 0,\\ &U\xi^i + f^i U\tau = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $f^1 = F$, $f^2 = u$ в соответствии с системой (2). Подстановка $\xi^i = f^i\tau + \hat{\xi}^i$ упрощает уравнения (13) до вида

$$\begin{aligned} &\hat{X}f^i - X_0\hat{\xi}^i = 0,\\ &U\hat{\xi}^i + U(f^i)\tau = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\hat{X} = \hat{\xi}^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\xi}^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \varphi\frac{\partial}{\partial u}. \tag{15}$$

После подстановки в (14) значения $f^2 = u$ немедленно получаем

$$\varphi = X_0\hat{\xi}^2, \qquad \tau = -U\hat{\xi}^2. \tag{16}$$

Подставляя теперь в (14) найденные значения (τ, φ) и $f^1 = F$, получим систему

$$\begin{aligned} &\hat{\xi}^1 F_{x^1} + \hat{\xi}^2 F_{x^2} + F_u X_0\hat{\xi}^2 - X_0\hat{\xi}^1 = 0,\\ &U\hat{\xi}^1 - F_u U\hat{\xi}^2 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Классификацию начинаем со второго уравнения системы (17). В зависимости от значения F_{uu} возможны следующие варианты:

A. $F_{uu} = 0$, т.е. $F = \alpha\left(t, x^1, x^2\right) u + \beta\left(t, x^1, x^2\right)$. В этом случае между $\hat{\xi}^1$ и $\hat{\xi}^2$ существует соотношение

$$\hat{\xi}^1 = \alpha\hat{\xi}^2 + \gamma, \tag{18}$$

где $\gamma = \gamma(t, x^1, x^2)$ — произвольная функция. После подстановки (18) в (17) получим

$$\hat{\xi}^2(\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2}) = X_0\gamma - \gamma F_{x^1}.$$

Здесь появляются две возможности:

A1. Если $\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2} \neq 0$ (система управляема), то

$$\hat{\xi}^2 = \frac{X_0\gamma - \gamma F_{x^1}}{\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2}}.$$

Выполняя обратные подстановки, получим следующие выражения для коэффициентов оператора симметрий:

$$\begin{aligned}
\tau &= -\frac{\alpha\gamma_{x^1} + \gamma_{x^2} - \gamma\alpha_{x^1}}{\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2}},\\
\xi^1 &= \frac{\alpha\gamma_t + \gamma\beta_{x^2} - \gamma\alpha_t - \beta\gamma_{x^2}}{\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2}},\\
\xi^2 &= \frac{\gamma_t + \beta\gamma_{x^1} - \gamma\beta_{x^1}}{\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2}},\\
\varphi &= X_0\left(\frac{X_0\gamma - \gamma(\alpha_{x^1}u + \beta_{x^1})}{\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2}}\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, в случае A1 система допускает бесконечномерную алгебру симметрий с коэффициентами (19), которые зависят от произвольной функции трех переменных $\gamma\left(t, x^1, x^2\right)$. Примечательно, что коэффициенты $\left(\tau, \xi^1, \xi^2\right)$ не зависят от управления u.

A2. Если $\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2} = 0$ (система неуправляема), то

$$\hat{\xi}^2 = \psi\left(t, x^1, x^2, u\right),$$

где ψ — произвольная функция указанных аргументов, а для определения функции γ получаем уравнение

$$X_0\gamma - \gamma F_{x^1} = 0,$$

т.е.

$$\gamma_t + \beta\gamma_{x^1} + u(\alpha\gamma_{x^1} + \gamma_{x^2}) = \gamma\beta_{x^1} + u\gamma\alpha_{x^1}.$$

Расщепим полученное уравнение по u:

$$\begin{aligned} &\gamma_t + \beta\gamma_{x^1} = \gamma\beta_{x^1},\\ &\alpha\gamma_{x^1} + \gamma_{x^2} = \gamma\alpha_{x^1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Вопрос о совместности системы (20) решается путем исследования на полноту набора операторов

$$\begin{aligned} &Y_1 = \partial_t + \beta\partial_{x^1} + \gamma\beta_{x^1}\partial_\gamma,\\ &Y_2 = \alpha\partial_{x^1} + \partial_{x^2} + \gamma\alpha_{x^1}\partial_\gamma. \end{aligned} \tag{21}$$

Найдем их коммутатор:

$$\begin{aligned} [Y_2, Y_1] = {}&(\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2})\partial_{x^1} +\\ &+ (\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2})_{x_1}\partial_\gamma. \end{aligned} \tag{22}$$

В силу нашего предположения о неуправляемости и выполнении условия (11), коэффициенты при ∂_{x^1} и ∂_γ обращаются в нуль, т.е. $[Y_2, Y_1] = 0$. Это означает, что для любых α, β, удовлетворяющих условию (11), набор (21) всегда полон и система (20) имеет решение вида

$$\Gamma\left(\omega^1, \omega^2\right) = 0,$$

где $\omega^1\left(t, x^1, x^2\right)$, $\omega^2\left(t, x^1, x^2, \gamma\right)$ — два функционально независимых инварианта операторов Y_2, Y_1. Таким образом, для случая A2 коэффициенты принимают вид

$$\begin{aligned} &\tau = -\psi_u, \qquad \xi^1 = \alpha\psi - (\alpha u + \beta)\psi_u + \gamma,\\ &\xi^2 = \psi - u\psi_u, \qquad \varphi = X_0(\psi_u). \end{aligned} \tag{23}$$

B. $F_{uu} \neq 0$. Заметим, что в этом случае функция F нелинейна по u и, следовательно, система всегда управляема. Решение второго уравнения системы (17), выполненное в соответствии с работой [3], принимает вид

$$\hat{\xi}^1 = \sigma - \frac{F_u}{F_{uu}}\sigma_u, \qquad \hat{\xi}^2 = -\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u. \tag{24}$$

где $\sigma = \sigma\left(t, x^1, x^2, u\right)$ — произвольная функция. Подставляя найденные значения $\hat{\xi}^1$, $\hat{\xi}^2$) в первое уравнение ситемы (17), получим уравнение на σ

$$\begin{aligned} &F_{uu}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + F_{uu}F\frac{\partial\sigma}{\partial x^1} + uF_{uu}\frac{\partial\sigma}{\partial x^2} - F_{x^1}F_{uu}\sigma + \\ &\qquad + (F_uF_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - FF_{ux^1} - uF_{x^2})\frac{\partial\sigma}{\partial u} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнение (25) — квазилинейное уравнение в частных производных относительно функции σ, которое может быть решено, например, методом характеристик. И хотя при некоторых спецификациях функции F это уравнение может заметно упрощаться (например, при $F_{x^1} = 0$ оно становится линейным; а при $F = F(u)$ превращается в уравнение $X_0\sigma = 0$), тем не менее с точки зрения "широты решения" (в смысле Э. Картана), функция σ будет определяться тремя функционально независимыми инвариантами уравнения (25). Коэффициенты оператора симметрий для случая B принимают вид:

$$\begin{aligned} &\tau = U\left(\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u\right), \qquad \xi^1 = FU\left(\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u\right) + \sigma - \frac{F_u}{F_{uu}}\sigma_u, \\ &\xi^2 = uU\left(\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u\right) - \frac{1}{F_{uu}}\sigma_u, \qquad \varphi = -X_0\left(\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Пример 2. Линейная нестационарная система

$$\begin{aligned} &\dot{x}^1 = tu + x^2, \\ &\dot{x}^2 = u \end{aligned} \tag{27}$$

неуправляема, т.к. удовлетворяется условие (11) и система допускает первый интеграл

$$x^1 - tx^2 = C.$$

Заметим, что замена переменных $y = x^1 - tx^2$ приводит систему (27) к "каноническому" виду

$$\begin{aligned} &\dot{y} = 0, \\ &\dot{x}^2 = u. \end{aligned}$$

Система (20) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} &\gamma_t + x^2\gamma_{x^1} = 0, \\ &t\gamma_{x^1} + \gamma_{x^2} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

и имеет своим решением $\gamma = \gamma\left(x^1 - tx^2\right)$. Поэтому алгебра инвариантности системы (27) образована прямой суммой операторов $X_1 \oplus X_2$, где

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \gamma(x^1 - tx^2)\partial_{x^1},\\
&X_2 = -\psi_u\partial_t + (t\psi - \left(tu + x^2\right)\psi_u)\partial_{x^1} + (\psi - u\psi_u)\partial_{x^2} +\\
&\qquad + \left(\psi_{tu} + \left(tu + x^2\right)\psi_{ux^1} + u\psi_{ux^2}\right)\partial_u.
\end{aligned}
$$

Пример 3. Линейная управляемая система в канонической форме Бруновского

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}^1 = x^2,\\
&\dot{x}^2 = u,
\end{aligned}
$$

в соответствии с (19) допускает оператор симметрии вида

$$
X = -\gamma_{x^2}\partial_t + \left(\gamma - x^2\gamma_{x^2}\right)\partial_{x^1} + \left(\gamma_t + x^2\gamma_{x^1}\right)\partial_{x^2} + X_0^2(\gamma)\partial_u,
$$

где $X_0 = \partial_t + x^2\partial_{x^1} + u\partial_{x^2}, \gamma = \gamma\left(t, x^1, x^2\right)$.

Пример 4. Нелинейная управляемая система вида

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}^1 = u^2,\\
&\dot{x}^2 = u,
\end{aligned}
$$

в соответствии с (26) допускает оператор симметрии вида

$$
\begin{aligned}
&X = \sigma_{uu}\partial_t + \left(u^2\sigma_{uu} - 2u\sigma_u + \sigma\right)\partial_{x^1} + (u\sigma_{uu} - \sigma_u)\partial_{x^2} -\\
&\qquad - \left(\sigma_{tu} + u^2\sigma_{x^1u} + u\sigma_{x^2u}\right)\partial_u,
\end{aligned}
$$

где, в соответствии с (25), $\sigma = \sigma\left(u, x^1 - tu^2, x^2 - tu\right)$.

4. Заключение. Результаты приведенной групповой классификации (см. табл. 1) свидетельствуют о том, что для систем второго порядка имеется 2 принципиальных возможности: в случае управляемой системы максимальная точечная алгебра симметрий бесконечномерна и определяется одной произвольной функцией трех переменных: в случае линейной системы эта функция зависит только от времени и фазовых координат, а для нелинейных систем — и от управлений. Расширение допускаемой группы наступает у неуправляемых систем, алгебра инвариантности которых представляет собой прямую сумму двух бесконечномерных алгебр, определяемых, соответственно, одной функцией четырех переменных и одной функцией одной переменной.

Таблица 1

Вариант	Спецификация	Кол-во ф-ций	Вид функций
A1	$F = \alpha u + \beta, K \neq 0$	1	$\gamma\left(t, x^1, x^2\right)$
A2	$F = \alpha u + \beta, K = 0$	2	$\psi\left(t, x^1, x^2, u\right),\ \gamma\left(\omega^1\right)$
B	$F_{uu} \neq 0$	1	$\sigma\left(\omega^1, \omega^2, \omega^3\right)$

5. Благодарности. В.И. Легенький выражает благодарность Техническому Университету Дрездена (Германия) за частичную финансовую поддержку данной работы.

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[2] Lehenkyi V. Point symmetries of control systems and their applications // J. Nonlin. Math. Phys. — 1997. — **4**, № 1–2. — P. 168–172.

[3] Lehenkyi V. The integrability of some underdetermined systems // Proceedings of the Third International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. — 2000. — **30**, part 1. — P. 157–164.