УДК 517.977.1+512.81+531.01

Лёгенький В.И., Рудольф И.

О СИММЕТРИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ «НЕГОЛОНОМНОГО АВТОМОБИЛЯ»

1.Введение. В неголономной механике и теории управления давно изучается математическая модель движения на плоскости идеализированного автомобиля [1,2,5,7]. При этом, как правило, ограничиваются рассмотрением только кинематических уравнений движения, а динамические уравнения игнорируются.

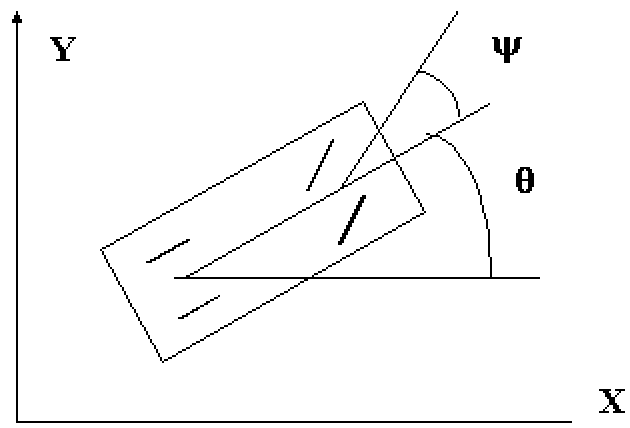

Рис. 1

Математическая модель такого автомобиля (в соответствие с Рис. 1) может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u^1 \cos\theta, \\ \dot{y} &= u^1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} &= u^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где: (x,y) – координаты, θ - угол между направлением скорости u^1 и осью ординат, u^2- угловая скорость вращения. Мы будем интерпретировать (u^1, u^2) как управляющие воздействия, а (x, y, θ) – как фазовые координаты; дифференцирование производится по времени t. Кинематическое соотношение между величиной l (расстояние между передними и задними колесами), углом ψ и угловой скоростью u^2 задается соотношением $u^2 = (u^1 tg\psi)/l$.

При изучении оптимальных процессов в системе (1), задачах программирования траекторий, терминальных проблемах оказывается полезным знание симметрий системы (1) – совокупности таких преобразований фазовых координат и управлений, которые переводят решения системы (1) в её же решения (и, соответственно, сохраняют вид системы (1)). До настоящего времени исследователи ограничивались использованием только преобразований фазовых координат и времени [2,7]. Инфинитезимальные операторы (генераторы) этих симметрий хорошо известны и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \\ X_2 &= \partial_x, \\ X_3 &= \partial_y, \\ X_4 &= y\partial_x - x\partial_y - \partial_\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

и образуют 4-мерную алгебру Ли (мы используем обозначения и терминологию, принятые в современной дифференциальной геометрии и групповом анализе; см., например, [3,6]) . Тем не менее, при синтезе алгоритмов управления оказывается целесообразным подвергать преобразованиям не только фазовые координаты, но и управляющие воздействия (u^1, u^2), поэтому целью настоящей работы является вычисление для системы (1) более общих преобразований вида

$$X = \tau\partial_t + \xi^1\partial_{x^1} + \xi^2\partial_{x^2} + \xi^3\partial_\theta + \varphi^1\partial_{u^1} + \varphi^2\partial_{u^2}. \tag{3}$$

2. Результаты вычисления симметрий. В работе [4] показано, что при векторных управлениях коэффициенты $(\tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ не зависят от управлений, а коэффициенты (φ^1, φ^2) - зависят. Если ввести ассоциированный с системой (1) дифференциальный оператор

$$X_0 = \partial_t + u^1 \cos\theta \partial_x + u^1 \sin\theta \partial_y + u^2 \partial_\theta, \tag{4}$$

то основной результат может быть сформулирован в виде:

Теорема: Максимальную алгебру инвариантности системы (1) образуют операторы (3) с коэффициентами

$$\begin{aligned}
&\tau = \tau(t, x, y, \theta),\\
&\xi^1 = B(x, y)\sin\theta + \alpha(x, y),\\
&\xi^2 = -B(x, y)\cos\theta + \beta(x, y),\\
&\xi^3 = -B_x \cos\theta - B_y \sin\theta + (\beta_y - \alpha_x \sin\theta\cos\theta + \beta_x \cos^2\theta - \alpha_y \sin^2\theta),\\
&\varphi^1 = Bu^2 - u^1 X_0\tau + u^1(\alpha_x \cos^2\theta + \alpha_y \sin\theta\cos\theta + \beta_y \sin^2\theta + \beta_x \sin\theta\cos\theta),\\
&\varphi^2 = X_0\xi^3 - u^2 X_0\tau,
\end{aligned} \tag{5}$$

где (τ, α, β, B) – произвольные функции указанных аргументов, а буквенные нижние индексы означают дифференцирование по соответствующему аргументу.

♦Доказательство может быть проведено с использованием алгоритма Ли [6] и дополнительных соотношений, приведенных в [4].♦

Как видим, основная алгебра симметрий системы (1) оказалась бесконечномерной и зависит от двух функций четырех переменных (τ, B) и двух функций двух переменных (α, β). На основании соотношений (5) может быть исследовано два важных частных случая:

1. Проектируемая алгебра симметрий – преобразование фазовых координат и управлений производится раздельно, т.е. $\varphi^i = \varphi^i(u^1, u^2)$. В этом случае алгебра симметрий оказывается конечномерной (восьмимерной) и дополнительно к операторам $X_1 - X_4$ добавляются операторы

$$
\begin{aligned}
X_5 &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - u^2\partial_{u^2},\\
X_6 &= \sin\theta\partial_x - \cos\theta\partial_y + u^2\partial_{u^1},\\
X_7 &= t\partial_t - u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2},\\
X_8 &= \theta\partial_t - u^1u^2\partial_{u^1} - (u^2)^2\partial_{u^2}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2. Скорость $u^1 = 1 = const$. В этом случае максимальная алгебра инвариантности 5-мерна и образована операторами $X_1 - X_4$ из (2) и оператором X_5 из (6).

3. Заключение. Таким образом, мы показали, что в отличие от случая симметрий «по состоянию», алгебра которых является конечномерной (4-мерной), при рассмотрении общего класса симметрий, вовлекающих в преобразование и управляющие воздействия, алгебра симметрий становится бесконечномерной. Знание операторов (5) может оказаться полезным при решении граничных (терминальных) задач в рамках модели (1).

1. Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. – М.: Высшая школа, 1970. – 272 с.
2. Яковенко Г.Н. Траекторный синтез оптимального управления // Автоматика и телемеханика № 6.- 1972.- С. 5-12.
3. Bryant, R.L., Chern, S.S., Gardner, R.B., Goldschmidt,H.L., Griffits, P.A., Exterior Differential Systems, Vol. 18, Springer-Verlag, 1991.- 475 p.
4. Lehenkyi V. Point symmetries of control systems and their applications // J. Nonlin. Math. Phys., 1997, Vol. 4, N 1-2, p. 168-172.
5. Murray M., Rathinam M. Differential Flatness of Two One-Forms in Arbitrary Number of Variables // Systems and Control Letters, 1999, ¹ 36, p. 317-326.
6. Olver P. J. Application of Lie groups to differential equations, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1986.
7. Rouchon P., Rudolph J. Invariant tracking and stabilization: problem formulation and examples. – In book: Stability and stabilization of Nonlinear Systems, Lecture Notes in Control and Information Science, 1999, Vol. 246, Chapter 14, p. 261-273.