УДК 517.977.1+512.81+531.01

Лёгенький В.И.

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ КРИТЕРИЙ РЕДУКЦИИ [1] УРАВНЕНИЯ $G(t,x,x',...)+\varepsilon F(t,x,x',...)=0$ К ВИДУ $G(\hat{t},\hat{x},\hat{x}',...)=0$.

1. Введение. В прикладных задачах механики и управления динамическими системами, как правило, рассматриваются математические модели, содержащие физические параметры (константы). Эти параметры могут характеризовать свойства среды (плотность воздуха, ускорение силы тяжести, и т.п.) или свойства объекта исследования (характерные геометрические размеры, массу и т.п.). Типично, когда параметр входит в изучаемую модель линейным образом, например в виде

$$G(t,x,x',...)+\varepsilon F(t,x,x',...)=0\,, \tag{1}$$

где: *t*- время, *x(t)* – координата, ε - параметр, $G(t,x,x',...), F(t,x,x',...)$ – некоторые функции, характеризующие динамику движения; многоточие означает возможную зависимость от высших производных. Если уравнение

$$G(t,x,x',...)=0 \tag{2}$$

в некотором смысле проще исходного уравнения (1), то возникает задача устранения нежелательного члена εF в уравнении (1), т.е. задача редукции уравнения (1) к виду (2). Иногда удается показать, что параметр ε - малый, что тоже дает основание для подобного упрощения, но, все же, в большинстве задач ни о какой «малости» не может идти речи. Возникает вопрос: можно ли, используя какие либо преобразования переменных, все-таки привести уравнение (1) к виду (2) и в каких случаях это возможно (т.е. какими свойствами должно обладать уравнение (1)). Частичный ответ на поставленный вопрос (некоторые достаточные условия) и составляет результат настоящих исследований.

2. Основной результат. Наш подход к сформулированной проблеме будет опираться на идеи и методы группового анализа дифференциальных уравнений и, в частности, на понятие непрерывной группы преобразований (группы симметрий), допускаемой уравнением (1) [10]. При этом в число преобразуемых по групповым

[1] В более ранних работах (см., например, [7]) употреблялся термин «приводимость».

законам переменных включаются не только фазовые координаты и время, но и параметры модели. Многие авторы обращали внимание на эффективность подобного подхода к анализу динамических систем, но он использовался, как правило, в других целях – введение безразмерных переменных, размножение решений, сведение краевой задачи к задаче Коши и т.д. [2,3,8,9]. В рассматриваемой формулировке – т.е. при использовании групповых преобразований с целью исключения определенных членов при мультипликативном вхождении параметра – первые результаты, по-видимому, были получены автором в работе [5], а затем применены к проблемам математической физики в работе [12]. Основной результат может быть сформулирован следующим образом:

Теорема 1. Пусть уравнение (1) допускает непрерывную группу преобразований G

$$\hat{t} = g(t,x,\varepsilon,a), \quad \hat{x} = h(t,x,\varepsilon,a), \quad \hat{\varepsilon} = f(t,x,\varepsilon,a), \tag{3}$$

причем такую, что для { $f \neq 0$, $h^2 + g^2 \neq 0$ ***} значение*** $\hat{\varepsilon} = 0$ ***принадлежит орбите группы (т.е.*** $\exists a^0(\varepsilon) \neq 0, \hat{\varepsilon} = f(t,x,\varepsilon,a^0) = 0$ ***,); тогда замена переменных*** $t \mapsto \hat{t}(t,x,\varepsilon,a^0), x \mapsto \hat{x}(t,x,\varepsilon,a^0)$ ***редуцирует уравнение (1) к виду (2), причем*** $(\hat{t},\hat{x})$***-инварианты группы G.***

<u>Доказательство.</u> Действительно, так как группа (3) сохраняет вид уравнения (1), то в новых переменных оно может быть записано в виде:

$$G(\hat{t},\hat{x},\hat{x}',...) + \hat{\varepsilon}F(\hat{t},\hat{x},\hat{x}',...) = 0\,. \tag{4}$$

Выполнение условия $\hat{\varepsilon} = 0$ редуцирует (4) к уравнению (2).

3. Алгоритм и его модификации. Проверка условий теоремы предполагает выполнение определенных вычислений, основу которых составляет алгоритм Ли вычисления допускаемой группы [10]. Приведем этот алгоритм применительно к нашей задаче:

A. Фиксируем класс инфинитезимальных операторов симметрии вида

$$X = \tau(t,x,\varepsilon)\partial_t + \xi(t,x,\varepsilon)\partial_x + \eta(t,x,\varepsilon)\partial_\varepsilon\,, \tag{5}$$

т.е. для неопределенных пока коэффициентов (τ,ξ,η) указываем характер их функциональной зависимости от переменных (t,x,ε).

B. Записываем условие инвариантности уравнения (1) относительно ***k***-го продолжения оператора *X:*

$$\underset{(k)}{X}(G + \varepsilon F)\big|_{G+\varepsilon F=0} = 0\,. \tag{6}$$

Расщепляем возникшее уравнение по «свободным» переменным $(\dot{x}, \ddot{x}, ...)$ и получаем т.н. «определяющие уравнения», т.е. систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных коэффициентов (τ, ξ, η).

C. Решаем полученную систему и выбираем из полученных решений те, для которых $\{\eta \neq 0, \tau^2 + \xi^2 \neq 0\}$.

D. Для выбранных операторов симметрии X_i решаем уравнения Ли для определения однопараметрических групп:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a=0} = \tau, \quad \frac{\partial g}{\partial a}\Big|_{a=0} = \xi, \quad \frac{\partial h}{\partial a}\Big|_{a=0} = \eta. \tag{7}$$

E. Для функций h_i проверяем условие теоремы и отбираем хотя бы один соответствующий оператор.

F. Для выбранного оператора находим инварианты (в том числе – дифференциальные инварианты) и записываем исходное уравнение в терминах этих инвариантов. Преобразованное уравнение приобретает гарантированный Теоремой 1 вид.

Как видим, общий алгоритм поиска редуцирующей замены переменных оказывается достаточно трудоемким и связан с решением системы уравнений в частных производных (6) и решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7). Возможность упрощения алгоритма связана, во-первых, с изменением априорной зависимости коэффициентов (τ, ξ, η) от переменных (t, x, ε) [2], а, во-вторых, с поиском абсолютных, а не относительных инвариантов (в этом случае не осуществляется переход на многообразие (1) в условии (6)). Безусловно, подобные упрощения сужают общность, но поскольку нас интересуют достаточные условия (и наличие хотя бы одного оператора),

[2] Очевидно, что наиболее широкий класс точечных преобразований составляют преобразования, в которых коэффициенты (τ, ξ, η) зависят от всех переменных (t, x, ε). Можно ограничиться и выбором более узкого класса операторов, например, положив $\tau = \tau(t, x), \xi = \xi(t, x), \eta = \eta(\varepsilon)$, что в дальнейшем может упростить процедуру решения определяющих уравнений. Тем не менее, выбор класса операторов не совсем произволен. Кроме условия, налагаемого на класс операторов Теоремой 1 $\{\eta \neq 0, \tau^2 + \xi^2 \neq 0\}$, должно еще выполняться условие замкнутости на выбранном классе относительно операции коммутирования, т.е. для двух произвольных операторов X_1 и X_2 из выбранного класса их коммутатор должен тоже принадлежать выбранному классу, т.е. $[X_1, X_2] \subset X$. Поэтому, например, выбор класса операторов $\tau = \tau(t, x), \xi = \xi(t, x), \eta = \eta(t, \varepsilon)$ - некорректен, т.к. не выполняются условия замкнутости.

подобная стратегия оказывается оправданной. Специалисты по групповому анализу достаточно часто используют подобное «балансирование» между общностью (широтой искомой группы) и возможностью довести вычисления до конца (см., например, [4,9]). В нашем случае можно задаться более простым оператором вида

$$X = \tau(t,x)\partial_t + \xi(t,x)\partial_x + \eta(\varepsilon)\partial_\varepsilon \tag{8}$$

и исследовать абсолютную инвариантность уравнения (1) относительно этого оператора. Справедлив следующий результат:

Теорема 2. Уравнение (1) в классе операторов (8) допускает не более чем двумерную алгебру (абсолютной) инвариантности с генераторами

$$X_1 = \tau^1(t,x)\partial_t + \xi^1(t,x)\partial_x + \partial_\varepsilon\ , \tag{9}$$

$$X_2 = \tau^2(t,x)\partial_t + \xi^2(t,x)\partial_x + \varepsilon\partial_\varepsilon\,. \tag{10}$$

Доказательство. Существо доказательства основано на анализе определяющего уравнения (6), которое после некоторых рутинных вычислений может быть представлено в виде

$$Q(t,x,\tau,\xi,...) + \varepsilon P(t,x,\tau,\xi,...) + \eta(\varepsilon)S(t,x,\tau,\xi,...) = 0, \tag{11}$$

где (Q,P,S) – некоторые функции, причем такие, что $P_\varepsilon = Q_\varepsilon = S_\varepsilon = 0$. Дважды дифференцируя условие (11) по ε, приходим к уравнению

$$\frac{d^2\eta}{d\varepsilon^2} = 0,$$

решение которого немедленно дает $\eta = C_1\varepsilon + C_2$ (C_1, C_2 - произвольные постоянные). Следовательно, базис алгебры может быть взят в виде (9), (10), причем для операторов X_1, X_2 должно выполняться коммутационное соотношение $[X_1, X_2] = X_1$. Генератор X_2 порождает группу растяжений (по ε) вида $\hat{\varepsilon} = \varepsilon e^a$ (где a – групповой параметр). Ясно, что (при $a \neq -\infty$) значение $\hat{\varepsilon}=0$ не принадлежит орбите группы, поэтому с помощью оператора (10) нельзя осуществить редукцию уравнения (1) к уравнению (2), а можно лишь «обезразмерить» задачу, т.е. привести её к виду (ε =1)

$$G(\hat{t},\hat{x},\hat{x}',...) + F(\hat{t},\hat{x},\hat{x}',...) = 0. \tag{12}$$

Напротив, как следует из уравнений Ли для генератора X_1 вида

$$\frac{d\hat{t}}{\tau^1(\hat{t},\hat{x})} = \frac{d\hat{x}}{\xi^1(\hat{t},\hat{x})} = d\varepsilon = da \tag{13}$$

ноль принадлежит орбите группы (при $a^0 = -\varepsilon$): $\hat{\varepsilon} = \varepsilon + a^0 = 0$. Необходимые редуцирующие замены переменных могут быть получены как инварианты оператора X_1, т.е. как первые интегралы системы (14). Тем самым доказано следующее:

Теорема 3: Для редукции уравнения (1) к виду (2) достаточно, чтобы оно допускало оператор

$$X = \tau(t,x)\partial_t + \xi(t,x)\partial_x + \partial_\varepsilon \tag{14}$$

в качестве оператора абсолютной инвариантности с некоторыми коэффициентами $(\tau,\xi): \tau^2 + \xi^2 \neq 0$***; причем в качестве редуцирующей замены переменных достаточно использовать инварианты оператора (14).***

Критерий, определяемый Теоремой 3, вносит значительные упрощения в общий алгоритм, т.к. становятся проще определяющие уравнения (они содержат меньше неизвестных) и нет необходимости выполнять пункты D и E алгоритма.

4. Пример: редукция уравнений движения самолета вертикального взлета и посадки [10]. Рассмотрим математическую модель плоского движения самолета вертикального взлета и посадки (Рис. 1).

Динамика изменения координат *X, Z* и угла θ определяется действующими на самолет управляющими силами $\vec{F},\vec{T}$ и силой тяжести $m\vec{g}$. Уравнения движения, в соответствии со вторым законом Ньютона, могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= -T\sin\theta + F_{2x} - F_{1x} \\ m\ddot{Z} &= T\cos\theta - F_{2z} + F_{1z} - mg \\ J\ddot{\theta} &= 2Fl\cos\alpha \end{aligned} \tag{15}$$

где: m - масса самолета, J - момент инерции, l - расстояние от точки приложения сил F_i до центра масс, α - угол между направлением действия сил F_i и плоскостью симметрии самолета. Приложенные силы F_1, F_2 отклонены на одинаковый угол α и равны по модулю: $|F_1| = |F_2| = |F|$. Проекции сил имеют вид:

$$\begin{aligned} F_{2x} &= F\cos(90^\circ - \theta - \alpha) = F\sin(\theta + \alpha) \\ F_{1x} &= F\cos(90^\circ - \theta + \alpha) = F\sin(\theta + \alpha) \\ F_{2x} - F_{1x} &= F(\sin(\theta + \alpha) - \sin(\theta + \alpha)) = 2F\cos\theta\sin\alpha \\ F_{2z} &= F\sin(90^\circ - \theta - \alpha) = F\cos(\theta + \alpha) \\ F_{1z} &= F\sin(90^\circ - \theta + \alpha) = F\sin(\theta - \alpha) \\ F_{1z} - F_{2z} &= F(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha)) = 2F\sin\theta\sin\alpha \end{aligned} \tag{16}$$

С учетом (16) уравнения (15) примут вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= -T\sin\theta + 2F\cos\theta\sin\alpha \\ m\ddot{Z} &= T\cos\theta + 2F\sin\theta\sin\alpha - mg \\ J\ddot{\theta} &= 2Fl\cos\alpha \end{aligned} \tag{17}$$

Приведем систему (17) к безразмерному виду, следуя методике, предложенной в работах [6, 11]. На первом шаге воспользуемся π - теоремой, которая устанавливает связь между размерностью входящих в модель параметров и переменных и допускаемыми операторами симметрии. Размерности величин имеют вид:

$$\begin{aligned}&[X]=м,[Z]=м,[t]=с,[m]=кг,[l]=м,\\&[T]=кг\cdot м\cdot с^{-2},[F]=кг\cdot м\cdot с^{-2},[g]=м\cdot с^{-2},[J]=кг\cdot м^{2}\end{aligned} \tag{18}$$

В (18) обозначено: *м* – метры, *с* - секунды, *кг* – килограммы. Таким образом, основных величин три, остальные являются производными. Соответственно, можно выписать три оператора растяжения, характеризующие инвариантность системы уравнений (17) по отношению к изменению масштабов основных величин:

$$\begin{aligned}&X_1 = x\partial_x + z\partial_z + l\partial_l + g\partial_g + F\partial_F + T\partial_T + 2J\partial_T\\&X_2 = t\partial_t - 2g\partial_g - 2F\partial_F - 2T\partial_T\\&X_3 = m\partial_m + F\partial_F + T\partial_T + J\partial_T\end{aligned} \tag{19}$$

Система (17) допускает еще один оператор растяжения, характеризующий инвариантность уравнения моментов по отношению к одновременному «растяжению» величин l и J. Соответственно, имеем оператор

$$X_4 = l\partial_l + J\partial_T\,. \tag{20}$$

Система операторов $X_1 \div X_4$ действует в пространстве 9 переменных t,m,x,z,l,T,F,g,J и образует полную систему, а потому имеет 9-4=5 инвариантов. Для их вычисления необходимо проанализировать ядро (нуль-пространство) матрицы *A*, составленной из целочисленных коэффициентов операторов[3]:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&2&1&1&1&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&-2&0&-2&-2&0&0&1\\1&0&0&1&1&1&0&0&0\end{pmatrix} \tag{21}$$

Результирующая матрица *W* получается такой:

[3] Определение ядра матрицы A предполагает определение всех векторов s, удовлетворяющих уравнению As=0. Эта процедура автоматизирована в большинстве систем аналитических вычислений. Например, в системе MATLAB результат получается применением к матрице A оператора null(A,’r’), а в системе REDUCE оператора nullspace(A). Результат в обеих системах представляется также в виде матрицы W, столбцы которой и есть искомые вектора. При записи матрицы A следует иметь ввиду, что в системе MATLAB максимально разреженными (isolated) оказываются нижние строки матрицы W, а в системе REDUCE – верхние. Это требует соответствующего размещения столбцов матрицы A: исключаемые переменные соответственно должны располагаться в начальных столбцах матрицы A при вычислениях в системе MATLAB и в конечных – при вычислениях в системе REDUCE. Кроме того, для получения рациональных (дробных) коэффициентов в системе REDUCE должен быть поднят флаг ‘on rounded’. Записанная выше матрица A подготовлена для вычислений в системе MATLAB, поэтому порядок столбцов в ней соответствует переменным m,l,g,J,T,F,x,z,t для последовательности операторов X_1, X_4, X_2, X_3.

$$W=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

По коэффициентам матрицы W составляются безразмерные переменные (элементы матрицы – суть показатели степени соответствующих величин):

$$x=\frac{lm}{J}X,\, z=\frac{lm}{J}Z, u^1=\frac{T}{mg}, u^2=\frac{2F}{mg}, \tau=t\sqrt{\frac{lmg}{J}} \tag{23}$$

В этих переменных уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -u^1\sin\theta + u^2\cos\theta\sin\alpha \\ \ddot{z} &= u^1\cos\theta + u^2\sin\theta\sin\alpha - 1 \\ \ddot{\theta} &= u^2\cos\alpha \end{aligned} \tag{24}$$

Так как предполагается, что $\alpha \neq 90^\circ$, то удобно ввести параметр $\varepsilon = tg\alpha$, а вместо управления u^2 ввести произведение $u^2\cos\alpha$. Тогда окончательные безразмерные уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -u^1\sin\theta + \varepsilon u^2\cos\theta \\ \ddot{z} &= u^1\cos\theta + \varepsilon u^2\sin\theta - 1 \\ \ddot{\theta} &= u^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Исключая из системы (25) управления u^1, u^2, получим уравнение неголономной связи между x, z, θ в виде:

$$\ddot{x}\cos\theta + \ddot{z}\sin\theta + \sin\theta - \varepsilon\ddot{\theta} = 0. \tag{26}$$

Вводя упрощающую замену $y = z + \frac{\tau^2}{2}$, приведем (26) к виду

$$\Phi = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{z}\sin\theta - \varepsilon\ddot{\theta} = 0. \tag{27}$$

Уравнение (27) относится к классу уравнений (1) при специализации $F = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{z}\sin\theta$ и $G = -\ddot{\theta}$, поэтому к нему можно попытаться применить сформулированную выше Теорему 3. Найдем коэффициенты оператора (14), последовательно выполняя алгоритм, приведенный в п.3.:

A. Задаемся оператором

$$X = \xi^0\partial_\tau + \xi^1\partial_x + \xi^2\partial_y + \xi^3\partial_\theta + \partial_\varepsilon \tag{28}$$

B. Первое и второе продолжение оператора X принимают вид:

$$\underset{(1)}{X} = X + \zeta^1 \partial_{x'} + \zeta^2 \partial_{y'} + \zeta^3 \partial_{\theta'}$$
$$\underset{(2)}{X} = \underset{(1)}{X} + \eta^1 \partial_{x''} + \eta^2 \partial_{y''} + \eta^3 \partial_{\theta''} \qquad (29)$$

где коэффициенты ζ, η вычисляются по формулам

$$\zeta^i = D(\xi^i) - \dot{x}_i D(\xi^0)$$
$$\eta^i = D(\zeta^i) - \ddot{x}_i D(\xi^0) \qquad (30)$$

в которых $i = \overline{1,3}$; $x_i = (x, y, \theta)$, а оператор полного дифференцирования по времени имеет вид:

$$D = \partial_\tau + \dot{x}_i \partial_{x_i} + \ddot{x}_i \partial_{\dot{x}_i} + \ldots \qquad (31)$$

Действуя продолженным оператором $\underset{(2)}{X}$ на уравнение (27), получим:

$$\underset{(2)}{X}\Phi = -\xi^3(\sin\theta\ddot{x} - \cos\theta\ddot{y}) + \eta^1\cos\theta + \eta^2\sin\theta - \ddot{\theta} - \varepsilon\eta^3 = 0\,. \qquad (32)$$

Прежде всего, расщепим уравнение (32) по ε. Это означает, что η^3=0. Для выполнения последнего условия достаточно положить $\xi^0 = \xi^3 = 0$. Соответственно, условие (32) примет вид:

$$\eta^1\cos\theta + \eta^2\sin\theta - \ddot{\theta} = 0. \qquad (33)$$

Выпишем выражение для вычисления η^1:

$$\begin{aligned} \eta^1 = D^2(\xi^1) = \xi^1_{\tau\tau} + \dot{x}\xi^1_{\tau x} + \dot{y}\xi^1_{\tau y} + \dot{\theta}\xi^1_{\tau\theta} + \\ + \ddot{x}\xi^1_x + \dot{x}(\xi^1_{x\tau} + \dot{x}\xi^1_{xx} + \dot{y}\xi^1_{xy} + \dot{\theta}\xi^1_{x\theta}) + \\ + \ddot{y}\xi^1_y + \dot{y}(\xi^1_{y\tau} + \dot{x}\xi^1_{yx} + \dot{y}\xi^1_{yy} + \dot{\theta}\xi^1_{y\theta}) + \\ + \ddot{\theta}\xi^1_\theta + \dot{\theta}(\xi^1_{\theta\tau} + \dot{x}\xi^1_{\theta x} + \dot{y}\xi^1_{\theta y} + \dot{\theta}\xi^1_{\theta\theta}). \end{aligned} \qquad (34)$$

Аналогичное выражение можно выписать и для η^2. Подстановка этих значений в уравнение (33) позволяет провести расщепление последнего по различным степеням $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\theta}, \ldots$ и получить систему определяющих уравнений в виде:

$$\begin{aligned}
&\xi_x^1 \cos\theta + \xi_x^2 \sin\theta = 0 \\
&\xi_y^1 \cos\theta + \xi_y^2 \sin\theta = 0 \\
&\xi_\theta^1 \cos\theta + \xi_\theta^2 \sin\theta = 1 \\
&\xi_{xx}^1 \cos\theta + \xi_{xx}^2 \sin\theta = 0 \\
&\xi_{yy}^1 \cos\theta + \xi_{yy}^2 \sin\theta = 0 \\
&\xi_{\theta\theta}^1 \cos\theta + \xi_{\theta\theta}^2 \sin\theta = 0 \\
&\xi_{xy}^1 \cos\theta + \xi_{xy}^2 \sin\theta = 0 \\
&\xi_{x\theta}^1 \cos\theta + \xi_{x\theta}^2 \sin\theta = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\xi_{\tau\tau}^1 \cos\theta + \xi_{\tau\tau}^2 \sin\theta = 0
\end{aligned} \qquad (35)$$

C. Решаем систему определяющих уравнений (35). Дифференцируя первое уравнение по θ и сравнивая его с восьмым уравнением, приходим к заключению, что $\xi_x^1 = \xi_x^2 = 0$. Аналогично, можно показать, что $\xi_y^1 = \xi_y^2 = \xi_\tau^1 = \xi_\tau^2 = 0$. Следовательно, $\xi^1 = \xi^1(\theta), \xi^2 = \xi^2(\theta)$. Решая систему из третьего и шестого уравнения системы (35), окончательно находим, что $\xi^1 = \sin\theta, \xi^2 = -\cos\theta$. Таким образом, доказано, что исходное уравнение допускает оператор

$$X = \sin\theta\partial_x - \cos\theta\partial_y + \partial_\varepsilon . \qquad (36)$$

F. Оператор (36) имеет 2 инварианта

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= x - \varepsilon\sin\theta \\
\hat{y} &= y + \varepsilon\cos\theta
\end{aligned} \qquad (37)$$

и в этих переменных уравнение (27) приводится к виду, гарантированному Теор. 3:

$$\hat{x}''\cos\theta + \hat{y}''\sin\theta = 0 . \qquad (38)$$

В переменных $\hat{x}, \hat{y}$ при дополнительном преобразовании управляющей переменной[4]

$$\hat{u}^1 = u^1 - \varepsilon\dot{\theta}^2 \qquad (39)$$

заметно упрощается и система (25):

$$\begin{aligned}
\hat{x}'' &= -\hat{u}^1 \sin\theta \\
\hat{z}'' &= \hat{u}^1 \cos\theta - 1 \\
\theta'' &= u^2
\end{aligned} \qquad (40)$$

Заметим, что в отличие от работы [13], где замена переменных (37) была найдена из соображений «физической интуиции», в настоящей работе эта замена имеет строгий математический смысл – инварианты группы эквивалентностей.

5. Заключение. Основной результат настоящего исследования состоит в формулировке достаточных условий редукции системы (1) к более простому виду (2).

[4] Можно показать, что $\hat{u}^1$ есть не что иное, как второй дифференциальный инвариант второго порядка дважды продолженного оператора *X*.

Теорема 3 позволяет предложить простой и конструктивный рецепт для проверки возможности подобной редукции путем испытания системы (1) на инвариантность относительно оператора (14). Заметим, что указанный подход возможен и в тех случаях, когда параметр в рассматриваемой системе отсутствует: его всегда можно принудительно ввести, погрузив исходную задачу в некоторое параметрическое семейство (этот прием лежит в основе метода инвариантного погружения [1]). Если же проверка показывает, что операторы вида (14) отсутствуют, следует испытать изучаемую систему на инвариантность относительно более общего оператора (5), однако поиск коэффициентов (τ, ξ, η) при этом заметно усложняется. Дальнейшие детали и случаи многопараметрической редукции читатель может найти в работах автора [5,6].

1. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое пограммирование и уравнения в частных произвоных. – М.: Мир, 1974. – 207 с.

2. Верлань А.Ф., Москалюк А.К. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. - К.: Наук. думка, 1988. - 288 с.

3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. - М.: Наука, 1988. - 328 с.

4. Ибрагимов Н.Х. Алгебра Вессио-Гулдберга-Ли и ее использование при интегрировании нелинейных уравнений. – В сб.: Современный групповой анализ. – М.: МФТИ, 1993. - С. 43-48.

5. Легенький В.И. Симметрийный анализ управляемых систем и его приложения к задачам динамики полета // Дис.… докт. техн. наук, Киев, 1996.- 232 с.

6. Легенький В.И. О минимально-параметрической форме уравнений движения летательных аппаратов // Прикл. механика, 1995, №10, с. 81-87.

7. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы.— М.: Гостехтеоретиздат, 1952. – 280 с.

8. Митропольский Ю.А., Лопатин А.К. Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики. - К.: Наукова думка, 1988. - 272 с.

9. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. - М.: Мир, 1982. - 296 с.

10. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400с.

11. Олвер П. Приложения групп Ли к диффееренциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

12. Burde G. Expanded Lie Group Transformations and Similarity Reductions of Differential Equations // Proc. of Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2002, Vol. 43, part 1, pp. 93-101.

13. Martin Ph., Devasia S., Paden B. A Different Look at Output Tracking: Control of a VTOL Aircraft // Automatica, 1996, Vol. 32, No. 1, pp. 101-107.