Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 187–196

УДК 512.816:53.072.2:531.01

π-теорема в проблеме параметрической редукции динамических систем

В.И. ЛЕГЕНЬКИЙ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: victor@imath.kiev.ua

Проаналізована роль π-теореми в проблемі параметричної редукції динамічних систем. На прикладах показано, що передчасне застосування π-теореми звужує можливості такої редукції та ускладнює подальший груповий аналіз вихідної динамічної системи.

We analyze the role of π-theorem in the problem of parametric reduction of dynamical systems. Several examples show that the premature application of π-theorem in the problem of minimal-parametric description of the dynamical systems restricts the utility of such reduction, and further group analysis becomes more complicated.

1. Введение. Известному американскому математику Ричарду Беллману принадлежит замечательное наблюдение [1, с. 17]: "...беспокойные инженеры и экономисты, безусловно, хотели бы иметь "поваренную" книгу математических рецептов на все случаи жизни – нечто вроде прославленной таблицы интегралов или даже логарифмов ...". Роль такого рецепта в проблеме параметрической редукции динамических систем (т.е. в проблеме приведения уравнений модели к минимально-параметрическому виду) играет так называемая π-теорема. Мы приведем ее в редакции Л.В. Овсянникова [2, с. 263]:

Теорема 1 (π-теорема). *Любая безразмерная функция физических величин является функцией от безразмерных "комбинаций" этих величин; любое соотношение между физическими величинами равносильно некоторому соотношению между их безразмерными "комбинациями".*

Суть теоремы подсказывает естественный путь уменьшения параметров: из фазовых координат, времени и параметров модели следует образовать безразмерные комбинации и переписать исходные уравнения в терминах этих комбинаций. Так как число этих комбинаций заведомо меньше совокупного числа координат и параметров, следовательно, число параметров в редуцированной модели будет также меньшим.

Пример 1. Рассмотрим математическую модель осциллятора с квадратичным сопротивлением и линейным трением:

$$m\ddot{x} + k\dot{x}^2 + cx = 0, \tag{1}$$

где x означает линейную координату, m – массу, k, c – коэффициенты сопротивления и трения соответственно, дифференцирование производится по времени t. Размерности величин следующие:

$$[x] = \text{м}, \quad [t] = \text{с}, \quad [m] = \text{кг}, \quad [k] = \text{кг}/\text{м}, \quad [c] = \text{кг}/\text{с}^2.$$

Безразмерные комбинации будем искать в соответствии с алгоритмом, предложенным в работе [3]. Вначале составим таблицу размерностей:

	t	x	m	k	c
t	1	0	0	0	−2
x	0	1	0	−1	0
m	0	0	1	1	1

По приведенной таблице формируем матрицу размерностей A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} & 0 & -2 \\ E & -1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{array} \right)$$

и находим ядро (нуль-пространство) этой матрицы, т.е. все вектора s, удовлетворяющие уравнению $A_1 s = 0$. Эта процедура автоматизирована в большинстве систем аналитических вычислений. Например, в системе MATLAB результат получается применением к матрице A_1 оператора null(A_1, ‘r’), а в системе REDUCE – оператора nullspace(A_1). Результат в обеих системах представляется также в виде матрицы B_1, столбцы которой и есть искомые вектора. Для нашего примера матрица B_1 принимает вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0,5 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ей соответствует таблица показателей степени для безразмерных комбинаций:

	$\pi_{11} = \hat{t}$	$\pi_{12} = \hat{x}$
t	1	0
x	0	1
m	$-0,5$	-1
k	0	1
c	0,5	0

Новые безразмерные переменные принимают вид:

$$\pi_{11} = \hat{t} = t\sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \pi_{12} = \hat{x} = x\frac{k}{m},$$

а исходное уравнение может быть записано в виде:

$$\ddot{\hat{x}} + \dot{\hat{x}}^2 + \hat{x} = 0.$$

Приведенный пример – это так сказать “success story” π-теоремы: редуцированная модель содержит только новые координаты и уже не содержит характерных физических констант, как и гарантирует теорема. Не всегда, однако, дело обстоит так.

Пример 2. Рассмотрим похожую модель

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0, \qquad (2)$$

отличающуюся от вышерассмотренной только тем, что производная $\dot{x}$ входит линейно, а не квадратично. Соответственно, размерности прежние, за исключением коэффициента α:

$$[x] = \text{м}, \quad [t] = \text{с}, \quad [m] = \text{кг}, \quad [\alpha] = \text{кг/с}, \quad [c] = \text{кг/с}^2.$$

Таблица размерностей принимает вид:

	t	x	m	α	c
t	1	0	0	-1	-2
x	0	1	0	0	0
m	0	0	1	1	1

Ей соответствует матрица размерностей A_2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & -1 & -2 \\ E & \vdots & 0 & 0 \\ & \vdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеющая ядро

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

которому соответствует таблица

	$\pi_{21} = \tilde{t}$	$\pi_{22} = \tilde{m}$
t	1	0
x	0	0
m	0	1
α	-1	-2
c	1	1

Новые безразмерные переменные принимают вид:

$$\pi_{21} = \tilde{t} = t\frac{c}{\alpha}, \quad \pi_{22} = \tilde{m} = m\frac{c}{\alpha^2},$$

а уравнение может быть представлено как:

$$\tilde{m}\ddot{\tilde{x}} + \dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = 0.$$

Для удобства сравнения с примером 1, можно выбрать другую комбинацию безразмерных переменных (по правилу: функция от инварианта – тоже инвариант):

$$\tilde{t} = \frac{\pi_{21}}{\sqrt{\pi_{22}}} = t\sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi_{22}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{cm}}.$$

Тогда преобразованное уравнение (штрих обозначает дифференцирование по преобразованному безразмерному времени) примет вид:

$$x'' + \tilde{\alpha}x' + x = 0. \tag{3}$$

Таким образом, замечаем, что хотя время в обоих примерах преобразуется одинаково, но второе уравнение во-первых, содержит одну безразмерную константу $\tilde{\alpha}$, а, во-вторых, мы замечаем, что координата x в нем – не преобразовывалась(!) – ей не с чем было "комбинироваться", а, значит, уравнение по-прежнему остается размерным, только имеет уже не размерность силы, а размерность длины. Для того, чтобы разобраться в этой ситуации, потребуются средства группового анализа.

2. Параметрическая редукция как задача группового расслоения. Начнем с терминологического замечания. Термин "редукция", который в буквальном смысле означает "приведение", в русскоязычной литературе все же приобрел смысл "уменьшение". Поэтому, когда говорят, например, "редуцированное уравнение", то, главным образом, имеют ввиду уравнение, у которого уменьшился порядок, либо уменьшилось количество неизвестных и т.д. Как правило, преобразование, с помощью которого уравнение приобрело другой вид, рассматривается отдельно от самого этого уравнения. По мнению автора более точным является рассмотрение и самого преобразования и нового уравнения совместно.

В дальнейшем мы будем вести речь о групповых преобразованиях, при которых редуцированное уравнение играет роль разрешающей системы, а само преобразование – роль автоморфной системы. Необходимые теоретические положения можно найти в работах Л.В. Овсянникова [2] и Ю.Н. Павловского [4,5]. В рамках такого подхода для расслоения дифференциального уравнения с параметрами (обозначим через p вектор параметров)

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, p) = 0$$

следует прежде всего найти его инфинитезимальные симметрии вида

$$X = \tau(t, x, p)\partial_t + \xi(t, x, p)\partial_x + \varphi(t, x, p)\partial_p, \tag{4}$$

причем для наших целей интерес представляют операторы, для которых выполняется условие $\{\varphi \neq 0\}$. Тогда в качестве интересующих нас замен можно использовать инварианты этих операторов, а само уравнение надо записать в терминах этих инвариантов.

Сразу же заметим, что вышеприведенным преобразованиям, полученным из соображений размерности, соответствуют операторы растяжений, образующие абелеву подалгебру в общей алгебре симметрий. В первом случае – это операторы

$$X_1 = t\partial_t - 2c\partial_c, \quad X_2 = x\partial_x - k\partial_k, \quad X_3 = m\partial_m + k\partial_k + c\partial_c,$$

а во втором случае – это операторы

$$Y_1 = t\partial_t - \alpha\partial_\alpha - 2c\partial_c, \quad Y_2 = x\partial_x, \quad Y_3 = m\partial_m + \alpha\partial_\alpha + c\partial_c.$$

Обратим внимание на оператор Y_2. Он не удовлетворяет вышеприведенному условию и именно это является причиной того, что в первом примере удалось полностью освободиться от параметров, а вовтором – нет. Это также проливает свет на то, что преобразованное уравнение во втором примере осталось размерным: причина состоит в том, что оно (уравнение) – дифференциальное, а не функциональное. В последнем случае (т.е. для уравнения $F(x, \pi^1, \pi^2) = 0$) наличие оператора Y_2 означало бы его однородность по x, что позволило бы представить его в виде $F(x, \pi^1, \pi^2) = xG(\pi^1, \pi^2) = 0$, а следовательно, в виде $G(\pi^1, \pi^2) = 0$. Для дифференциального уравнения – это не так, поэтому фразу “любое соотношение” в теореме 1 следует заменить на “любое функциональное соотношение”.

Безусловно, разыскивая операторы симметрии в более широком классе, у нас есть надежда получить большее число необходимых для редукции операторов. Но при этом возникает ситуация, подобная отысканию операторов точечной симметрии для дифференциальных уравнений первого порядка (или их систем), а именно: определяющие уравнения для коэффициентов операторов являются недоопределенными (что, вообще говоря, приводит к появлению бесконечномерных групп симметрий) и их решение по сложности не уступает интегрированию исходного уравнения. Поэтому мы можем сузить класс операторов симметрии, наложив те или иные условия. Например, положив $\tau_p = 0$, $\xi_p = 0$, мы будем разыскивать т.н. “группу эквивалентностей”, а при $\varphi_t = \varphi_x = 0$ – ее подгруппу (иногда называемую “сепарабельной”). Примеры подобного балансирования между общностью результата и возможностью провести вычисления “до конца” хорошо известны (см., например, работу Н.Х. Ибрагимова [6] или работу Л.В. Овсянникова [7]).

Возвращаясь к примеру 2, можно показать, что в классе операторов (4), для которых выполняются дополнительные условия $\tau_p = 0$, $\xi_p = 0$, $\varphi_t = \varphi_x = 0$, уравнение допускает еще 2 оператора симметрии:

$$Y_4 = \partial_t, \quad Y_5 = tx\partial_x - 2m\partial_\alpha - \alpha\partial_c.$$

Оператор Y_4 для нас интереса не представляет (так же, как и оператор Y_2, это оператор из ядра, т.е. допускается исходным уравнением при любых значениях коэффициентов). Напротив, оператор Y_5 для нас полезен. Прежде, чем проводить редукцию с учетом этого дополнительного оператора, заметим, что подалгебра $\langle Y_1, Y_3, Y_5\rangle$ – неабелева. Действительно, анализируя попарные коммутаторы

$$[Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_1, Y_5] = Y_5, \quad [Y_5, Y_3] = 0,$$

замечаем, что центр алгебры образован оператором Y_3, а оператор Y_5 принадлежит идеалу. В силу этого, редукцию следует проводить в порядке: $Y_3 \longrightarrow Y_5 \longrightarrow Y_1$. Как видно, наличие оператора Y_5 изменило порядок редукции по сравнению с π-теоремой и нам предстоит выяснить, насколько он существенен.

Итак, начинаем с оператора Y_3. Для него выполнено еще условие $\tau = \xi = 0$ и это означает, что из 3 коэффициентов m, α, c существенны только два. Выбирая в качестве инвариантов величины α/m и c/m, получим то же уравнение (2), в котором можно считать $m = 1$:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0.$$

Оператор Y_1 останется без изменений, а оператор Y_5 преобразуется к виду: $Y_5 = tx\partial_x - 2\partial_\alpha - \alpha\partial_c$. Его инварианты получаются в результате интегрирования системы

$$\frac{dx}{tx} = -\frac{d\alpha}{2} = -\frac{dc}{\alpha}$$

и могут быть взяты в виде:

$$\hat{x} = xe^{\frac{\alpha t}{2}}, \quad q = \frac{\alpha^2}{4} - c,$$

а уравнение преобразуется к виду:

$$\ddot{x} + qx = 0.$$

Как видим, у нас не только уменьшилось число параметров, но и изменилось само уравнение: исчез аддитивный член, содержащий первую производную. Такое явление не случайно: его закономерности проанализированы в работе [8]. Что же произошло с оператором Y_1? В новых переменных он выглядит так: $Y_1 = t\partial_t - 2q\partial_q$ и имеет инвариант $\hat{t} = t\sqrt{q}$. После этой замены уравнение примет окончательный вид:

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{5}$$

и уже не содержит характерных физических констант.

Теперь ответим на главный вопрос статьи: что же произойдет, если редукция была проведена “неправильно”, т.е. на первом этапе использованы операторы π-теоремы и уравнение уже имеет вид (3). Могут ли помочь средства группового анализа на этом этапе? У нас есть две возможности: первая состоит в том, чтобы вычислить оператор симметрии, допускаемый уравнением (3) по известному нам оператору Y_5, используя формулу преобразования векторных полей, а второй путь – прямые вычисления. Идя по первому пути, получим

$$\tilde{Y}_5 = -\tilde{\alpha}t\partial_t + 2tx\partial_x + (\tilde{\alpha}^2 - 4)\partial_{\tilde{\alpha}}.$$

Таким образом, мы нашли оператор симметрии, допускаемый уравнением (3). Для нахождения инвариантов следует решить систему

$$-\frac{dt}{\tilde{\alpha}t} = \frac{dx}{2tx} = \frac{d\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}^2 - 4}.$$

Решения могут быть взяты в форме $\hat{x} = xe^{\frac{\tilde{\alpha}t}{2}}$, $\hat{t} = t\sqrt{1 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{4}}$, после чего уравнение примет в точности вид (5). Но сможем ли мы найти этот оператор симметрии прямыми вычислениями, ведь он уже принадлежит классу операторов

$$Y = \tau(t, x, \tilde{\alpha})\partial_t + \xi(t, x, \tilde{\alpha})\partial_x + \varphi(\tilde{\alpha})\partial_{\tilde{\alpha}}? \tag{6}$$

Система определяющих уравнений для коэффициентов последнего оператора имеет вид:

$$2\xi_{tx} - \tau_{tt} + 3x\tau_x + \tilde{\alpha}\tau_t + \varphi = 0, \quad \xi_{xx} - 2\tau_{tx} + 2\tilde{\alpha}\tau_x = 0,$$
$$\xi_{tt} - x\xi_x + 2x\tau_t + \tilde{\alpha}\xi_t + \xi = 0, \quad \tau_{xx} = 0.$$

Анализ этой системы в общем случае достаточно сложен, так как в процессе решения возникают уравнения, в точности совпадающие с исходным. Поэтому был выбран такой путь: коэффициенты, для которых получались такие уравнения, полагались равными нулю. Результат подобной стратегии таков: удалось показать, что:

Утверждение 1. *Уравнение* (3) *в классе операторов*

$$Y = \tau(t,x)\partial_t + \xi(t,x)\partial_x + \varphi(\tilde{\alpha})\partial_{\tilde{\alpha}}$$

допускает только операторы ∂_t, $x\partial_x$, т.е. операторы из ядра.

Утверждение 2. *Уравнение* (3) *допускает оператор бесконечномерной симметрии*

$$Y_h = -\tfrac{1}{2}(h_t + \tilde{\alpha}h)\partial_t + hx\partial_x - \tfrac{1}{2}[h_{ttt} - (\tilde{\alpha}^2 - 4)h_t]\partial_{\tilde{\alpha}}, \quad h = h(t).$$

Из последнего утверждения следует, что при $h = 2t$ уравнение допускает оператор $Y_h = \hat{Y}_5 - \partial_t$, т.е. уже полученный ранее оператор, расширенный оператором из ядра.

6. Заключение. Как нам удалось показать на примерах, основные группы, допускаемые динамическими системами с параметрами, не всегда являются группами растяжений и, соответственно, могут иметь неабелеву структуру. В последнем случае использование на начальном этапе редукции операторов симметрии, соответствующих π-теореме (которые не принадлежат в этом случае идеалу алгебры), может привести к усложнению процедуры поиска дополнительных операторов симметрии. Это проявляется в том, что искомый класс операторов симметрии приходится расширять – и, следовательно, усложнять систему определяющих уравнений. Достичь результата, т.е. получить полное аналитическое решение в этом случае удается редко. Причина состоит в том, что искомые группы оказываются бесконечномерными, а соответствующие им определяющие уравнения не проще исходного уравнения. Поэтому приходится проводить сужение класса искомых операторов симметрии непосредственно в процессе анализа этих определяющих уравнений, но это вряд ли можно отнести к регулярным методам решения.

[1] Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. – Москва: Наука, 1964. – 360 с.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[4] Павловский Ю.Н. Проблема декомпозиции в математическом моделировании // Матем. моделирование. 1991. – **3**, № 6. – С. 93–122.

[5] Павловский Ю.Н. Декомпозиция моделей управляемых систем. – Москва: Знание, 1985. – 32 с.

[6] Ибрагимов Н.Х. Алгебра Вессио–Гулдберга–Ли и ее использование при интегрировании нелинейных уравнений / Современный групповой анализ. – Москва: МФТИ, 1993. – С. 43–48.

[7] Ovsyannikov L.V. On x-autonomy property // Dokl. Akad. Nauk RAS. – 1993. – **330**. – P. 559–561.

[8] Легенький В.И. Теоретико-групповой критерий редукции уравнения $G(t, x, \dot{x}, \ldots) + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ldots) = 0$ к виду $G(\hat{t}, \hat{x}, \hat{\dot{x}}, \ldots) = 0$ // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 2, С. 94–102.