О МИНИМАЛЬНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ В ДИНАМИКЕ ПОЛЕТА

Лёгенький В.И.
ИПММС НАНУ, 03187, Киев, пр-т Глушкова, 42
e-mail: Lehenkyi@yahoo.com

Математические модели движения летательных аппаратов (ЛА), как правило, описываются системой дифференциальных уравнений, правые части которых содержат кроме фазовых (x^i) и управляющих (u^j) переменных значительное количество параметров (a^l):

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^i, u^j, a^l)$$

Параметрический анализ, т.е. необходимость получать семейства решений для различных значений параметров и изучать влияние этих параметров на решения является неотъемлемой частью любой задачи динамики полета (см., например, [3-5]). С другой стороны, хорошо известно, что качественное поведение ЛА определяется некоторыми обобщенными параметрами (например, аэродинамическим качеством, тяговооруженностью и т.д.) и правильное определение таких параметров гарантирует успех анализа. В подходах к этой проблеме переплелись как оригинальные инженерные приемы, так и строгие математические теории.

В докладе предлагается процедура введения новых обобщенных параметров на основе теории группового расслоения. В этом подходе для вышеуказанного класса математических моделей осуществляется поиск инфинитезимальных операторов симметрии вида

$$X = t\,(t,x,u,a)\partial_t + x^i(t,x,u,a)\partial_{x^i} + j^{\,j}(t,x,u,a)\partial_{u^j} + h^l(t,x,u,a)\partial_{a^l}$$

где обозначено $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, и исследуются инварианты этих операторов. В соответствии с теорией С. Ли (см., например, [1]), уравнения для неизвестных коэффициентов $t, x^i, j^{\,j}, h^l$ получаются из условия

$$\underset{(1)}{X}(F^i)\Big|_{F^i=0} = 0, \qquad (1)$$

где $\underset{(1)}{X}$ - первое продолжение оператора X, а $F^i = \dot{x}^i - f^i$. В общем случае решение получающихся уравнений достаточно трудоемко. Опыт показывает, что поиск операторов симметрии целесообразно проводить в 3 этапа: на первом этапе выписываются операторы симметрии, следующие из условий так называемой p-теоремы [2] и отражающие инвариантность рассматриваемых уравнений относительно масштабных изменений основных единиц измерения (массы, длины, времени), на втором этапе ищутся операторы растяжений, оставляющие неизменными некоторые инвариантные комбинации координат и параметров. После этого можно провести 1-ое расслоение уравнений к меньшему числу параметров. На третьем этапе можно воспользоваться условием (1) для поиска дополнительных операторов симметрии и дальнейшего расслоения.

Продольное движение ЛА [7].

Математическая модель продольного движения взята в форме:

$$\frac{dh}{dt} = V\sin q, \quad \frac{dL}{dt} = V\cos q, \quad (2)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}\left(P - (Ac_y^2 + B)\frac{rV^2}{2}S - mg\sin q\right), \qquad (3)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{mV}\left(c_y\frac{rV^2}{2}S - mg\cos q\right). \qquad (4)$$

Модель содержит время (t), 4 фазовые координаты (h, L, V, q) и 8 параметров (P, r, g, S, A, B, m, c_y). Расслоение проводим в соответствии с вышеприведенным алгоритмом. На первом шаге выписываем операторы, соответствующие p – теореме:

$$X_1 = t\partial_t - V\partial_V - 2P\partial_P - 2g\partial_g, \quad \text{(время)} \qquad (5)$$

$$X_2 = m\partial_m + P\partial_P + r\partial_r, \quad \text{(масса)} \qquad (6)$$

$$X_3 = h\partial_h + L\partial_L + V\partial_V + P\partial_P + 2S\partial_S + g\partial_g - 3r\partial_r. \quad \text{(длина)} \qquad (7)$$

На втором шаге замечаем, что величины r, S встречаются только в комбинации rS, т.е. допускается оператор растяжений

$$X_4 = r\partial_r - S\partial_S. \qquad (8)$$

Инварианты операторов $X_1 - X_4$ (замена переменных) примут вид:

$$\hat{t} = t\sqrt{\frac{rgS}{2m}}, \quad \hat{V} = V\sqrt{\frac{rS}{2mg}}, \quad (9)$$

$$\hat{P} = \frac{P}{mg}, \quad \hat{h} = h\frac{rS}{2m}, \quad \hat{L} = L\frac{rS}{2m}, \qquad (10)$$

а сами уравнения преобразуются виду, содержащему только 4 константы:

$$\frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = \hat{V}\sin q, \quad \frac{d\hat{L}}{d\hat{t}} = \hat{V}\cos q, \ (11)$$

$$\frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = \hat{P} - (Ac_y^2 + B)\hat{V}^2 - \sin q, \qquad (12)$$

$$\frac{dq}{d\hat{t}} = \frac{1}{\hat{V}}(c_y\hat{V}^2 - \cos q). \qquad (13)$$

Классическим методом С.Ли могут быть найдены еще два оператора симметрии:

$$X_5 = \partial_A - c_y^2\partial_B, \qquad (14)$$

$$X_6 = \hat{t}\partial_t + \hat{V}\partial_{\hat{V}} - 2c_y\partial_{c_y} + 2A\partial_A - 2B\partial_B. \qquad (15)$$

С использованием инвариантов операторов $X_5 - X_6$ окончательная замена переменных примет вид:

$$k = \frac{c_y}{c_x} = \frac{c_y}{Ac_y^2 + B}, \quad \tilde{P} = \hat{P}, \quad \tilde{h} = \hat{h}, \quad \tilde{L} = \hat{L}, \ (16)$$

$$\tilde{t} = \hat{t}\sqrt{c_x} = t\sqrt{\frac{c_x rSg}{2m}}, \qquad \tilde{V} = \hat{V}\sqrt{c_x} = V\sqrt{\frac{c_x rS}{2mg}}, \ (17)$$

а уравнения движения преобразуются к виду:

$$\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}} = \tilde{V}\sin q, \quad \frac{d\tilde{L}}{d\tilde{t}} = \tilde{V}\cos q, \ (18)$$

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{t}} = \tilde{P} - \tilde{V}^2 - \sin q, \quad (19)$$

$$\frac{dq}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\tilde{V}}(k\tilde{V}^2 - \cos q), \ (20)$$

и содержат вместо 8 только 2 константы: аэродинамическое качество (k) и тяговооруженность ($\tilde{P}$).

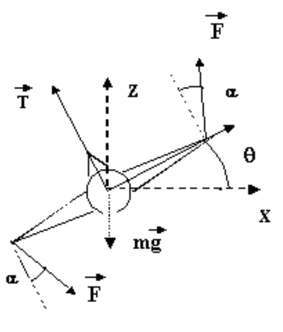

Рис. 1

Боковое движение СВВП [8].

Рассмотрим математическую модель плоского движения самолета вертикального взлета и посадки (см. рис. 1)

$$m\ddot{X} = -T\sin q + 2F\cos q\sin a$$
$$m\ddot{Z} = T\cos q + 2F\sin q\sin a - mg \qquad (21)$$
$$J\ddot{q} = 2Fl\cos a$$

Операторы симметрии, следующие из p –теоремы, имеют вид:

$$X_1 = X\partial_X + Z\partial_Z + l\partial_l + g\partial_g + F\partial_F + T\partial_T + 2J\partial_J$$
$$X_2 = t\partial_t - 2g\partial_g - 2F\partial_F - 2T\partial_T \qquad (22)$$
$$X_3 = m\partial_m + F\partial_F + T\partial_T + J\partial_J$$

Инвариантная комбинация параметров J/l генерирует оператор

$$X_4 = l\partial_l + J\partial_J. \qquad (23)$$

Замена переменных:

$$x = \frac{lm}{J}X, z = \frac{lm}{J}Z, u^1 = \frac{T}{mg}, u^2 = \frac{2F}{mg}, t = t\sqrt{\frac{lmg}{J}} \qquad (24)$$

В этих переменных уравнения принимают вид:

$$\ddot{x} = -u^1\sin q + u^2\cos q\sin a$$
$$\ddot{z} = u^1\cos q + u^2\sin q\sin a - 1 \ (25)$$
$$\ddot{q} = u^2\cos a$$

Методом С. Ли для этой системы найден еще один оператор симметрии

$$X_5 = \sin q\partial_x - \cos q\partial_z + (\dot{q})^2\partial_{u^1} + u^2\sin a\cos a\partial_{u^2} + \cos^2 a\partial_a \qquad (26)$$

В терминах инвариантов оператора X_5

$$\hat{x} = x - \tan a\sin q, \quad \hat{z} = z + \tan a\cos q, \quad \hat{u}^1 = u^1 - \tan a(\dot{q})^2, \quad \hat{u}^2 = u^2\cos a \qquad (27)$$

система принимает окончательный вид

$$\ddot{\hat{x}} = -\hat{u}^1\sin q,$$
$$\ddot{\hat{z}} = \hat{u}^1\cos q - 1, \qquad (28)$$
$$\ddot{q} = \hat{u}^2.$$

и не содержит более параметров.

Как мы видим, применение классического группового анализа (в частности, теории группового расслоения) к проблеме приведения математических моделей динамики полета ЛА к минимально-параметрическому виду позволяет целенаправленно находить необходимые замены переменных как инварианты допускаемых исходной моделью операторов симметрии. Тем не менее, использование на начальном этапе p-теоремы и поиск «очевидных» инвариантных комбинаций параметров позволяет значительно упростить решение задачи в целом. Необходимые детали вычислений можно найти в статьях автора [7,8].

Литература:

1. Ovsiannikov, L.V. Group Analisys of Differential Equations, Academic Press, New York,1982.

2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.:Наука, 1987. – 432 с.

3. Миеле А. Механика полета. Т.1. Теория траекторий полета. – М.: Наука,1965. – 408с.

4. Филатьев А.С. Оптимальный запуск искусственного спутника Земли с использованием аэродинамических сил // Космические исслеования. – 1991. – Т. 29, вып. 2, с. 255 – 271.

5. Ярошевский В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

6. Martin Ph., Devasia S., Paden B. A Different Look at Output Tracking: Control of a VTOL Aircraft // Automatica, 1996, Vol. 32, No. 1, pp. 101-107.

7. Легенький В.И. О минимально-параметрической форме уравнений движения летательных аппаратов // Прикладная механика. – 1995. - № 10, с. 81–87.

8. Легенький В.И. Теоретико-групповой критерий редукции уравнения $G(t, x, \dot{x}, \ldots) + eF(t, x, \dot{x}, \ldots) = 0$ к виду $G(\hat{t}, \hat{x}, \hat{\dot{x}}, \ldots) = 0$ // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 2, с. 94–102.