ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

УДК 512.622+512.816

Лёгенький В.И.
Институт проблем математических машин и систем НАНУ

О РАССЛОЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучаются группы, допускаемые алгебраическими уравнениями и анализируются алгоритмы их расслоения по найденным группам.

Введение. Хорошо известно, что исследование процессов, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа может быть сведено к анализу алгебраических уравнений. Характеристические многочлены, передаточные функции, границы устойчивости в пространстве параметров – все эти объекты анализа классической теории автоматического управления так или иначе связаны с алгебраическими уравнениями. В последнее время было опубликовано ряд работ (см., например, [11,12]), в которых предпринята попытка упрощения (редукции) возникающих алгебраических уравнений с помощью анализа размерностей исходной дифференциальной системы (П-теоремы). Последняя, с точки зрения теории непрерывных групп преобразований, является инструментом выявления хотя и весьма важной, но все же достаточно узкой группы однородных растяжений. Поэтому представляет интерес изучение этого вопроса с более широких позиций, а именно – с точки зрения изучения группы эквивалентностей, действующей в пространстве "переменные–параметры".

В настоящей статье мы коснемся классической проблемы поиска корней алгебраического уравнения

$$F(x, \mathbf{a}) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (1)$$

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

Здесь и в дальнейшем для простоты будем полагать $a_n = 1$. Алгоритмически подходы к решению этой задачи разнятся в зависимости от наших предположений о коэффициентах $(a_{n-1}, \ldots, a_0)$ уравнения (1). Если коэффициенты имеют конкретные числовые значения (или, как принято говорить в групповом анализе, – задана специализация уравнения (1)), то для решения задачи нам достаточно иметь устойчивый численный алгоритм, который позволяет находить корни с приемлемой точностью. Подобные алгоритмы имплементированы в большинство современных математических пакетов. Например, в системе MAPLE-12 компании Maplesoft (Canada) есть специальный инструмент (Precalculus->Polynomials and Roots), при вводе в поле которого некоторого уравнения вида (1) с заданными коэффициентами строится соответствующий график и производится автоматическое вычисление всех его действительных корней. Если же считать, что коэффициенты уравнения (1) заданы в самом общем, т.е. буквенном виде, то возникает проблема поиска некоей формулы $x = x(\mathbf{a})$, связывающей корни уравнения (1) с его коэффициентами. Многовековая история решения этой проблемы имеет, как известно, весьма скромные результаты: в общем случае при $n \geq 5$ решений в радикалах не существует. Тем не менее, попытки решения этой проблемы привели к открытию важных инструментов анализа – резольвент Лагранжа, групп Галуа и т.д. А, кроме того, между этими двумя полярными подходами проявилась некая "промежуточная"стратегия, а именно – с помощью эквивалентных преобразований привести уравнение (1) к последовательности более простых задач, содержащих, по возможности, меньшее число параметров и уравнений более низкого порядка. Анализируя возможные здесь подходы, Ф.Клейн писал [7, стр.152]:

"Предметом каждого из них является изучение корней общего уравнения пятой степени как функций коэффициентов уравнения. Оба исходят из идеи упростить эти функции так, чтобы вместо пяти коэффициентов уравнения можно было ввести меньшее количество независимых величин. Различают только используемые для этой цели средства: в первом случае

– это преобразование уравнений [1], а во втором – построение резольвент".

Что же касается возможности применения к анализу проблемы групп непрерывных преобразований С.Ли, то Ф.Клейн подобной перспективы не видел. Он отмечал [7, стр. 20]:

"Хотя теория таких групп весьма интересна и важна во многих отношениях, в наших исследованиях она не будет играть роли".

Первым, кто нарушил этот прогноз Ф.Клейна, был, вероятно, Л.Диксон, посвятивший завершающую часть работы [13] анализу инвариантов бинарных форм. Ему же принадлежит идея вовлечь в групповые преобразования коэффициенты. Он назвал эту расширенную группу "Total group". В современной литературе прижился другой термин – "Группа эквивалентностей", а работу Л.Диксона по непонятным причинам не цитируют в данном контексте. Тем не менее, общую тенденцию последнего времени можно охарактеризовать как взаимопроникновение идей дискретно-группового анализа в теорию дифференциальных уравнений (отметим, прежде всего, работы В.Ф.Зайцева, см., например, [4]), а идей групп непрерывных преобразований – в теорию алгебраических уравнений (см., например работу Н.Х.Ибрагимова [5] и П.Олвера и И.Берченко [10]). В развитие этих идей написана и настоящая работа.

1.Необходимые определения.

Дальнейший анализ будем проводить на инфинитезимальном уровне, т.е. характеризовать непрерывную группу с помощью инфинитезимального оператора

$$X = \xi(x)\partial_x + \varphi^i(\mathbf{a})\partial_{a_i}, \tag{2}$$

а симметрию многообразия $F(x, \mathbf{a}) = 0$ понимать в классическом смысле:

$$XF|_{F=0} = 0, \quad (XF = \lambda(x, \mathbf{a})F). \tag{3}$$

Здесь условие $F = 0$ после черты означает, как всегда, "переход на многообразие $F = 0$". Однако, в случае исследования алгебраических (не дифференциальных) многообразий, для точного

[1] имеются ввиду преобразования Чирнгауза.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

его выполнения нам потребуется привлечь еще одно понятие, а именно – понятие результанта. Напомним [6, стр.8-9], что если для полиномов

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{4}$$

и

$$g(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \tag{5}$$

составить матрицу коэффициентов M порядка $(m+n)\times(m+n)$

$$M = \left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & & & & \ddots & \\
0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & & \dots & a_1 & a_0 \\
0 & 0 & \dots & & 1 & b_{m-1} & \dots & \dots & b_1 & b_0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & b_{m-1} & \dots & & \dots & b_0 & 0 \\
\vdots & & & \dots & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & \dots & \dots & & b_0 & \dots & & \dots & 0 \\
1 & \dots & \dots & & b_0 & 0 & \dots & & & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\ \vdots\\1\end{array}}\right\} m \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\ \vdots\\1\\1\end{array}}\right\} n
\end{array}$$

то выражение

$$\mathcal{R}(f, g) = (-1)^{n(n-1)/2} \det M \tag{6}$$

называется **результантом** (в форме Сильвестра) полиномов f и g. Соответственно, субрезультанты определяются как определители матриц, полученных в результате вычеркивания соответствующих столбцов и строк матрицы M (см., например, [6, стр.19-25]), а дискриминант – как результант полинома F и его производной F' (так как в рассматриваемом случае $a_n = 1$). В этих терминах свойство двух полиномов иметь k общих корней характеризуется как равенство нулю соответствующего числа субрезультантов: $\mathcal{R}^{(j)} = 0, (j = \overline{0, k-1})$. Именно это условие мы будем использовать при "переходе на многообразие".

2. Идея расслоения. Расслоение – т.е. представление (декомпозиция) исходного уравнения в виде некоторой эквивалентной системы уравнений более простого вида, используется в явном или неявном виде давно. Различие – в понятии об эквивалентности и используемой терминологии. [2] Цель рассмотрения нижеупомянутых примеров – несколько унифицировать технику расслоения с использованием вышеприведенных определений.

Итак, рассмотрим, например, уравнение

$$f = x^4 + ax^2 + 1 = 0. \tag{7}$$

Сразу видно, что оно – биквадратное (допускается симметрия отражений $\hat{x} = -x$) и расслаивается в систему

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0, \\ y^2 + ay + 1 &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где y – есть ничто иное, как инвариант (минимальный) допускаемой группы отражений, второе уравнение системы (8) – разрешающее уравнение, а первое уравнение – единственное уравнение автоморфной системы. Возникает вопрос: единственно ли такое расслоение? Ответ: нет. Действительно, на уравнение (7) можно смотреть как на возвратное (допускается симметрия инверсий $\hat{x} = 1/x$). Тогда минимальный инвариант этой группы может быть взят в виде $y = x + 1/x$. Теперь расслоение исходного уравнения уже не столь тривиальная задача. Например, в работе [4, стр.32] предлагается несколько путаный алгоритм: деление уравнения (7) на x^2 и последующее его преобразование к виду, содержащему только y и его степени. Более точный рецепт состоит в том, чтобы переписать уравнение для инварианта в виде:

$$g = x^2 - yx + 1 = 0 \tag{9}$$

и получить разрешающее уравнение на y воспользовавшись

[2]Например, в работе В.Ф.Зайцева [4, стр. 32–33] используется термин "система специального вида".

условием $\mathcal{R}(f, g, x) = 0$. Для нашего примера получим:

$$\begin{aligned} x^2 - yx + 1 &= 0, \\ y^2 + a - 2 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Подобным образом может быть получено и расслоение для еще одной симметрии этого уравнения ($\hat{x} = -1/x$).

В этом же духе можно трактовать и использование симметрических многочленов при решении систем алгебраических уравнений и т.д. и т.п. Заметим, что расслоение по дискретной группе – это, так сказать, "расслоение порядка": разрешающее уравнение содержит те же коэффициенты, что и исходное, но его порядок – ниже порядка исходного уравнения. Резольвенты Лагранжа для уравнений 3-его и 4-го порядков также укладываются в эту схему (есть даже терминологическое сходство - "разрешающее уравнение"и "резольвента"имеют один и тот же смысл). В нашей работе несколько иная цель – проанализировать возможные "параметрические расслоения", когда уравнения разрешающей системы имеют тот же порядок, но содержат меньшее число параметров.

3. Основной результат.

Предложение 1. Алгебраическое уравнение n-ой степени (1) допускает трехмерную алгебру (эквивалентностей) с обра-

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

зующими [3]:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \partial_x - n\partial_{a_{n-1}} - \sum_{k=2}^{n}(n-k+1)a_{n-k+1}\partial_{a_{n-k}} \\
X_2 &= x\partial_x + \sum_{k=1}^{n} k a_{n-k}\partial_{a_{n-k}} \\
X_3 &= x^2\partial_x + \sum_{k=1}^{n-1}\Big((k+1)a_{n-k-1} - a_{n-1}a_{n-k}\Big)\partial_{a_{n-k}} - a_0 a_{n-1}\partial_{a_0}
\end{aligned} \qquad (11)
$$

Доказательство. Действие оператора (2) на уравнение (1) приводит к соотношению $G(x,\mathbf{a}) = \xi(x)\partial F/\partial x + \varphi^i(\mathbf{a})\partial F/\partial a$, в котором $(n+1)$ неизвестных функций ξ, φ^i. Поскольку $\xi(x)$ – функция единственной переменной, то она должна быть взята в виде $\xi(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$ (максимальная группа на прямой – проективная). Далее, переход на многообразие F для G означает выполнение n условий $\mathcal{R}^{(j)}(F,G,x) = 0$[4]$, j = \overline{0, n-1}$, из которых и найдены недостающие n значений $\varphi^i = \varphi^i(\mathbf{a}, C_1, C_2, C_3)$.

Из таблицы коммутаторов алгебры

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3$$

следует, что группа эквивалентностей алгебраического уравнения n-ой степени изоморфна группе $SL(2)$, которая, как известно, неразрешима.

---

[3]Оператор X_1 с учетом значения $a_n = 1$ может быть записан в более компактной форме $X_1 = \partial_x - \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_{n-k+1}\partial_{a_{n-k}}$; аналогично, оператор X_3 с учетом значения $a_{-1} = 0$ может быть записан как $X_3 = x^2\partial_x + \sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)a_{n-k-1} - a_{n-1}a_{n-k}\Big)\partial_{a_{n-k}}$. Эти же операторы, записанные в терминах корней $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для уравнения $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = 0$ примут вид: $X_1 = \partial_x + \sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}, X_2 = x\partial_x + \sum_{k=1}^{n} x_k\partial_{x_k}, X_3 = x^2\partial_x + \sum_{k=1}^{n} x_k^2\partial_{x_k}$.

[4]Третий аргумент в скобках (x) – означает исключаемую переменную, часто такое обозначение применяют в системах аналитических вычислений.

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

4. Пример. Приведем дословно несколько наивный, но, в тоже время, поучительный пример из книги Блехмана и соавторов [1, с.198–199].

"Пусть, например, – отмечают авторы указанной работы, – мы хотим составить таблицу, по которой можно было бы решать полное кубическое уравнение

$$a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0. \tag{12}$$

Если допустить, что каждый из параметров a_i $(i = \overline{0,3})$ может принимать 50 значений, а это не так уж много, – то всего получится $50^4 \cong 6 \cdot 10^5$ комбинаций этих значений. Средней ЭЦВМ, для выдачи результатов потребуется около месяца непрерывной работы (основное время будет уходить на печать), в результате чего получится набор рулонов лент общей длиной в 200 км и весом в 2 тонны . . . На самом деле положение с таблицей для решения уравнения (12) совсем не такое уж печальное. С помощью подстановки

$$z = -\frac{a_2}{3a_3} + \hat{z}q^{1/3}, \quad q = \frac{a_0}{a_3} - \frac{a_2a_1}{3a_3^2} + \frac{2a_2}{27a_3^3}, \tag{13}$$

можно перейти к уравнению

$$\hat{z}^3 + r\hat{z} + 1 = 0, \quad r = \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2}\right) q^{-2/3}, \tag{14}$$

содержащему всего один параметр r; таблицу значений решений последнего уравнения в зависимости от этого параметра уже нетрудно составить с помощью ЭЦВМ, даже если ему придать не 50, а 5000 значений. В результате решение уравнения (12) будет находиться с помощью двух одновходовых таблиц (кубических корней и $\hat{z}(r)$) и простых арифметических действий; это, конечно, несравненно проще, чем применение таблицы с четырьмя входами".

Проинтерпретируем приведенный пример с точки зрения полученного выше результата. Во-первых, следует заметить, что из четырех коэффициентов (a_0, a_1, a_2, a_3) существенными (в смысле работы [9, стр.16–19]) являются только три (в настоящей работе принято $a_n = 1$). Тогда уравнение (12) допускает, в соответствии с (11), операторы:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial_z - 3\partial_{a_2} - 2a_2\partial_{a_1} - a_1\partial_{a_0}, \\
X_2 &= z\partial_z + a_2\partial_{a_2} + 2a_1\partial_{a_1} + 3a_0\partial_{a_0}, \\
X_3 &= z^2\partial_z + \left(2a_1 - (a_2)^2\right)\partial_{a_2} + (3a_0 - a_1a_2)\partial_{a_1} - a_2a_0\partial_{a_0}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Можно убедиться, что замены (13) – (14) есть ничто иное, как расслоение исходной системы с помощью инвариантов операторов X_1, X_2. Возникает естественный вопрос о возможности дальнейшего расслоения с использованием не задействованного оператора X_3. Для анализа такой возможности представим его в новых переменных $(\hat{z}, r)$. Получим:

$$X_3 = (9\hat{z}^2 + 2\hat{z}r^2 + 6r)\partial_{\hat{z}} + (27 + 4r^3)\partial_r. \tag{16}$$

Теперь ясно, что для определения инварианта оператора X_3 нам придется проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{d\hat{z}}{dr} = \frac{9\hat{z}^2 + 2\hat{z}r^2 + 6r}{27 + 4r^3}, \tag{17}$$

которое является уравнением Риккати. Попытки найти решение указанного уравнения в известной автору справочной литературе к успеху не привели. Заметим, что коэффициент при ∂_r в формуле (16) есть ничто иное, как дискриминант уравнения (12).

Заключительные замечания. Другие возможные приложения найденных операторов симметрии возникают при рассмотрении их "усеченных"(без "x") вариантов (будем обозначать их как $\tilde{X}_i$. В частности, справедливы следующие утверждения:

Предложение 2. Уравнение для результанта двух полиномов (6) $\mathcal{R} = 0$ инвариантно относительно трехмерной алгебры $\tilde{Z} = C_1\tilde{Z}_1 + C_2\tilde{Z}_2 + C_3\tilde{Z}_3$, где $\tilde{Z}_i = \tilde{X}_i + \tilde{Y}_i$, а $\langle \tilde{X}_i, \tilde{Y}_i \rangle$ – соответствующие "усеченные"операторы симметрии соответствующих уравнений.

Предложение 2 может быть использовано при анализе границ устойчивости многочленов в пространстве их коэффициентов (условия Льенара–Шипара, см., например, [3]). Например, при $n = 3$ граница устойчивости (критерий Вышнеградского) имеет вид $a_2a_1 - a_0 = 0$, которое есть ничто иное, как условие Предложения 2 для полиномов $f = a_2x^2 + a_0$ и $g = x^2 + a_1$.

Предложение 3. Уравнение для дискриминанта полинома (1) $\mathcal{D} = 0$ инвариантно относительно трехмерной алгебры "усеченных"операторов $\tilde{X}_i$.

Относительно Предложения 3 сделаем следующее замечание: при $n = 2$ имеет место ситуация, когда условие $\mathcal{D} = 0$ – т.н. "вырожденный инвариант". Действительно, в этом случае, $\mathcal{D} = (a_1)^2 - 4a_0$, а операторы симметрии имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= -2\partial_{a_1} - a_1\partial_{a_0}, \\ \tilde{X}_2 &= a_1\partial_{a_1} + 2a_0\partial_{a_0}, \\ \tilde{X}_3 &= (2a_0 - (a_1)^2)\partial_{a_1} - a_0a_1\partial_{a_0}. \end{aligned} \tag{18}$$

В общем случае они связаны $a_0\tilde{X}_1 + a_1\tilde{X}_2 + \tilde{X}_3 = 0$, однако при $\mathcal{D} = 0$ ранг соответствующей матрицы коэффициентов становится равным единице, и, следовательно $\mathcal{D} = 0$ – вырожденный инвариант.

Автор выражает признательность проф. П. Олверу за помощь с литературой и проф. А. Утешеву за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: Наук. думка, 1976. – 270 с.
2. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
3. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем.– М.: Наука, 1979г. – 304с.
4. *Зайцев В. Ф.* Введение в современный групповой анализ. Ч. 1. Группы преобразований на плоскости. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 1996. – 40 с.
5. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. – М.: Знание, 1989. – 48 с.
6. *Калинина Е.А., Утешев А.Ю.* Теория исключения – СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.

7. *Клейн Ф.* Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
8. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. – М.: Мир, 1987. – 312 с.
9. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947. – 359 с.
10. *Berchenko I., Olver P.* Symmetries of Polynomials, J. Symbolic Computation (2000), 29, p. 485 – 514.
11. *Brennan S., Alleyne A.* Dimensionless Robust Control With Application to Vehicles, IEEE Trans. on Control Systems Technology, Vol. 13, No. 4, July 2005, pp. 624 – 630.
12. *Brennan S., Alleyne A.* Using a scale testbed: controller design and evaluation. IEEE Control Systems Magazine, 2001; 21:15-26.
13. *Dickson L.E.* Differential equations from the group standpoint, Annals of Math., 1924, ser.2, 25, p. 287 – 378.

Получено 15.06.2008

ISBN 978–5–7417–0234–5
Симметрии дифференциальных уравнений. М., 2008

Лёгенький Виктор Иванович. Украина, 03680, г. Киев, Проспект Глушкова, 42, Институт проблем математических машин и систем НАНУ, тел.: (044)241-05-16, e-mail: victor.lehenkyi@gmail.com