Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національна академія наук України
Інститут математики НАН України
Полтавський національний педагогічний університет
імені В.Г. Короленка
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка

Збірник праць II Всеукраїнського наукового семінару Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи

(до 75-річчя з дня народження В.І. Фущича)
19 - 20 жовтня 2011 року

Полтава – 2012

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національна академія наук України
Інститут математики НАН України
Полтавський національний педагогічний університет
імені В.Г. Короленка
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка

Збірник праць II Всеукраїнського наукового семінару Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи

(до 75-річчя з дня народження В.І. Фущича)
19 - 20 жовтня 2011 року

Полтава – 2012

УДК 517.9(06)
ББК 22.161.6я43
З-41

Збірник наукових праць за матеріалами "II Всеукраїнського наукового семінару Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи (до 75-річчя з дня народження В.І. Фущича)" 19 – 20 жовтня 2011 року – Полтава: ПолтНТУ, 2012. – 150 с.

Збірник присвячено пам'яті видатного українського математика Фущича Вільгельма Ілліча. В ньому зібрано доповіді учасників "II Всеукраїнського наукового семінару Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи(до 75-річчя з дня народження В.І. Фущича)", який відбувся в Полтавському національному педагогічному університеті імені В.Г. Короленка і Полтавському національному технічному університеті імені Юрія Кондратюка 19 – 20 жовтня 2011 року.

Розрахований на наукових працівників, аспірантів, спеціалістів в області математичної фізики.

УДК 517.9(06)
ББК 22.161.6я43

Матеріали друкуються мовами оригіналів.
За виклад, зміст і достовірність матеріалів відповідають автори.

Зміст

УДК 517.91

Похідний тип та симетрійний аналіз систем керування третього порядку з одним керуючим впливом

В.І. Легенький [†]**,** ***Й. Рудольф*** [‡]

[†] *Інститут проблем математическихъ машин і систем НАНУ, Київ*
E-mail: Victor.Lehenkyi@gmail.com

[‡] *Університет Саар, Німеччина*
E-mail: j.rudolph@lsr.uni-saarland.de

Вивчаються симетрійні властивості класу систем керування третього порядка з двома довільними функціями одного аргумента. Обчислений похідний тип цього класу в залежності від спеціалізації довільних функцій та отримані класифікаційні умови на алгебри симетрій відповідно до похідного типу. Встановлено, що розширення симетрйних властивостей спостерігається при втраті системою керованості.

1 Вступ

Симетрійний аналіз – майже єдиний метод аналізу математичних моделей реальних фізичних систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Це повною мірою стосується також математичних моделей систем керування, які з математичної точки зору є недовизначеними системами диференціальних рівнянь (тобто кількість рівнянь менша ніж кількість залежних змінних [16]). Ця властивість робить їх спорідненими з деякими класами рівнянь, що природним чином з'являються в диференціальній геометрії. Таким, наприклад, є клас рівнянь типу Монжа

$$\dot{x} = F(t, x, y, \dot{y}, \ddot{y}). \tag{1}$$

Зусилля видатних математиків минулого століття були направлені на з'ясування відповіді на запитання, при яких спеціалізаціях функції $F(\cdot)$ є можливим побудувати загальний розв'язок рівняння (1), див., наприклад, [11, 8, 9].

Останнім часом П.Керстен [12] вивчав симетрійні властивості конкретної системи $u_x = (v_{xx})^2$ із зазначеного класу, а В.Йолкін з колегами розглядав задачу групової класифікації афінних систем керування в монографії [2]. Тим не менше, системи третього порядка з нелінійним входженням керуючих впливів в рівняння математичних моделей не вивчались.

2 Постановка задачі

Розглядається клас систем керування з одним керуючим впливом і, відповідно, з двома довільними функціями, що має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(u), \\ \frac{dy}{dt} &= G(u), \\ \frac{dz}{dt} &= u, \end{aligned} \tag{2}$$

де t – час, x, y, z – фазові координати, u – керування. Функції F, G вважаються диференційованими необхідну кількість разів. Будемо розв'язувати класичну задачу групової класифікації у сенсі Л.В. Овсяннікова, тобто вивчати симетрії системи (2) в класі операторів

$$X = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z + \varphi\partial_u, \tag{3}$$

де $\partial_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$, а $\tau = \tau(t, x, y, z, u), \ldots, \varphi = \varphi(t, x, y, z, u)$, та з'ясовувати всі можливі спеціалізації функцій F, G, при яких симетрії системи розширюються порівняно з довільними значеннями вказаних функцій.

Зазвичай розв'язок поставленої проблеми передбачає побудову так званих "визначальних рівнянь" з їх подальшим аналізом (зокрема, знаходженням так званих "класифікуючих рівнянь", тобто умов на довільні функції, при виконанні яких симетрійні властивості системи розширюються).

В цій роботі ми попередньо проведем диференціально-геометричний аналіз вихідної системи рівнянь, та зясуємо, які саме рівняння мають бути об'єктом групового аналізу.

3 Похідний тип системи (2)

В нашому аналізі ми будемо дотримуватись ідей, означень та позначень, що прийняті у сучасній диференціальній геометрії (див., зокрема, [7, 3, 10, 16, 18]), а також розвивати підхід, запропонований авторами в роботах [13, 15, 14].

Отже, з системою рівнянь (2) можливо асоціювати відповідну систему диференціальних 1-форм:

$$\omega^1 = dx - Fdt, \quad \omega^2 = dx - Gdt, \quad \omega^3 = dz - udt. \tag{4}$$

Об'єднаємо ці форми в систему $I_{(0)} = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ та будемо вивчати її "похідний стяг" ("derived flag", див. [7, p.44]). Прості обчислення показують, що перша похідна система $I_{(1)}$ при будь-яких функціях F, G містить дві 1-форми, які можуть бути взяті, наприклад, у вигляді:

$$I_{(1)} = \{\omega^{13}, \omega^{23}\}, \tag{5}$$

де

$$\omega^{13} = \omega^1 - F_u\omega^3 = dx - F_u dz + (uF_u - F)dt, \tag{6}$$

$$\omega^{23} = \omega^2 - G_u\omega^3 = dy - G_u dz + (uG_u - G)dt, \tag{7}$$

а $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}, G_u = \frac{\partial G}{\partial u}$.

Для дослідження другої похідної системи $I_{(2)}$ треба перевірити умови інтегрованості 1-форм ω^{13}, ω^{23}. Ці умови – це умови тотожної рівності нулю двох 4-форм, а саме: $d\omega^{13} \wedge \omega^{13} \wedge \omega^{23} = 0$ та $d\omega^{23} \wedge \omega^{13} \wedge \omega^{23} = 0$. Обчислення показують, що ці умови приводять до рівнянь $F_{uu} = 0, G_{uu} = 0$, тобто, коли $F = C_1u + C_2, G = C_3u + C_4$, де C_i (тут і в подальшому) – довільні сталі. У цьому випадку $I_{(2)} = I_{(1)} = \{\omega^{13}, \omega^{23}\}$, інакше

$$I_{(2)} = \{\omega\}, \tag{8}$$

де

$$\omega = G_{uu}dx - F_{uu}dy + (F_{uu}G_u - G_{uu}F_u)dz + [G_{uu}(uF_u - F) - F_{uu}(uG_u - G)]dt. \tag{9}$$

Знову ж таки, за умови $d\omega \wedge \omega = 0$, тобто при

$$G_{uuu}F_{uu} - G_{uu}F_{uuu} = 0, \Longrightarrow G = C_5F + C_6u + C_7, \tag{10}$$

маємо $I_{(3)} = I_{(2)} = \{\omega\}$, тобто похідна система стабілізується, інакше $I_{(3)} = \{0\}$. Якщо, слідуючи за роботою [18], ввести означення "похідного типу" ("derived type", DT), – тобто послідовності розмірностей

$$DT = \{\dim I_{(0)}, \dim I_{(1)}, \dim I_{(2)}, \ldots, \dim I_{(N)}\}, \tag{11}$$

де N – похідна довжина (число, коли наступає стабілізація похідного типу), та узагальнити попередні обчислення, отримаємо три наступні варіанти:

1. DT$=\{3, 2, 2\}$, виконуються диференціальні умови $F_{uu=0}, G_{uu} = 0$ та відповідні інтегральні умови $F = C_1u + C_2, G = C_3u + C_4$, мають місце наступні інваріанти $x - C_1z - C_2t = C_8, y - C_3z - C_4t = C_9$;

2. DT$=\{3, 2, 1, 1\}$, виконується диференціальна умови $G_{uuu}F_{uu} - F_{uuu}G_{uu} = 0$ та відповідна інтегральна умова $G = C_5F + C_6u + C_7$, має місце інваріант $y - C_5x - C_6z - C_7t = C_{10}$;

3. DT$=\{3, 2, 1, 0\}$, має місце загальний випадок, попередні умови (та їх часткові випадки на кшталт $F_u = 0$) не виконуються, немає жодного інваріанта.

Зауважимо, що випадки 1 і 2 породжені умовами некерованості (умовами наявності перших інтегралів).

4 Симетрійний аналіз та класифікаційні умови

Як випливає з попередніх конструкцій, за відсутності вироджень (відсутності перших інтегралів), вірним є наступне твердження:

Пропозиція 1. *Вихідна система (2) може бути еквівалентно представлена лише однією диференціальною 1-формою, а саме 1-формою ω з (9).*

Ця пропозиція значно полегшує подальший груповий аналіз, оскільки маємо лише одну 1-форму. Умова симетрії в цьому випадку може бути записана у вигляді:

$$\mathfrak{L}_X\omega = \lambda\omega, \tag{12}$$

де $\mathfrak{L}_X$ – похідна Лі векторного поля X, а $\lambda = \lambda(t, x, y, z, u)$ – довільна 0-форма (функція). Якщо помножити зовнішньо рівняння (12) на ω, то внаслідок тотожності $\omega \wedge \omega = 0$, рівняння (12) набуде більш простого вигляду:

$$(\mathfrak{L}_X\omega) \wedge \omega = 0, \tag{13}$$

в якому вже відсутня функція λ. Наступне перетворення, яке варто зробити, це скористатись формулою

$$\mathfrak{L}_X\omega = X\,\lrcorner\, d\omega + d(X\,\lrcorner\,\omega) \tag{14}$$

та спеціальним анзацем, запропонованим Кентом Харрісоном в класичній статті [10], а саме ввести твірну функцію симетрій $\phi = \phi(t, x, y, z, u)$ за формулою

$$\phi = X\,\lrcorner\,\omega = G_{uu}\xi - F_{uu}\eta + (F_{uu}G_u - G_{uu}F_u)\zeta + [G_{uu}(uF_u - F) - F_{uu}(uG_u - G)]\tau. \tag{15}$$

Враховуючи останні підстановки, умова (14) набуде остаточного вигляду:

$$(X\,\lrcorner\, d\omega + d\phi) \wedge \omega = 0. \tag{16}$$

С точки зору теорії диференціальних форм остання умова – це 2-форма у просторі 5 змінних (t, x, y, z, u). Відповідно, ця умова породжує $C_5^2 = 10$ рівнянь на коефіцієнти форми. Важливою особливістю цих рівнянь є те, що вони не містять похідних від функцій $(\tau, \xi, \eta, \zeta, \varphi)$, а містять лише самі функції, які входять в ці рівняння лінійним чином (утворюють лінійну систему). Розв'язок цих рівнянь являє собою вирази для обчислення невідомих $(\tau, \xi, \eta, \zeta, \varphi)$ через твірну функцію симетрій та її похідні $(\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \phi_u)$ та, власне, додаткові рівняння на саму твірну функцію. Цих додаткових рівнянь виявляється два, а саме:

$$\phi_t + F\phi_x + G\phi_y + u\phi_z = 0, \quad F_u\phi_x + G_u\phi_y + \phi_z = 0. \tag{17}$$

Розв'язуючи ці рівняння, остаточно маємо

$$\phi = \phi(u, x - F_u z + (uF_u - F)t, y - G_u z + (uG_u - G)t), \tag{18}$$

тобто ϕ – довільна функція трьох зазначених аргументів. Остаточні рівняння для решти невідомих не наводимо зважаючи на їх громіздкість. Наведені формули характеризують групу симетрій для загального випадка. Як бачимо, вона є нескінченно-вимірною та характеризується довільною функцією трьох змінних. Це, очевидно, розширює ядро алгебри, яке у даному випадку є скінчено-вимірним: 1-форма ω допускає 5 операторів симетрії незалежно від спеціалізації функцій F, G:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, X_3 = \partial_y, \quad X_4 = \partial_z, \quad X_5 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z. \tag{19}$$

5 Висновки

По-перше, ми з'ясували, що вихідна система керування еквівалентна за симетрійними властивостями єдиній 1-формі, що значно спростило подальший аналіз. По-друге, введення твірної функції симетрій дозволило отримати загальний розв'язок системи визначальних рівнянь у кінцевому вигляді. По-третє, класифікаційні умови, як виявилось, є умовами зміни похідного типу асоційованої з вихідними рівняннями системи диференціальних форм. Ці класифікаційні умови є по суті умовами появи некерованості вихідної системи і, хоча в цьому випадку симетрійні властивості розширюються, практичного змісту вони не мають.

6 Подяка

В.І.Легенький висловлює подяку Державному фонду фундаментальних досліджень (ДФФД, Україна) та Німецькому Науковому Товариству (DFG) за часткову фінансову підтримку цієї роботи, що здійснювалась у рамках проекту № Ф39.1/001 "Групова класифікація систем керування третього порядку".

Література

[1] Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными. – М.: Мир, 1990. – 536 с.

[2] Ёлкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометический подход. – М.: Наука, 1997. – 320 с.

[3] Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1962. – 238 с.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400с.

[5] Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н. Группы, допускаемые динамическими системами // Методы оптимизации и их приложения/Новосибирск, 1982. – С. 155 – 189.

[6] Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. – 2-е изд. испр. – М.: Глав. ред. физ-мат. лит., 1975. – 464 с.

[7] Bryant, R.L., Chern, S.S., Gardner, R.B., Goldschmidt,H.L., Griffits, P.A., *Exterior Differential Systems*, Vol. **18**, Springer-Verlag, 1991.

[8] Cartan, E. Sur quelques quadratures dont l'element differentiel contient des fonctions arbitrares, *Bull. Soc. Math. France*, Vol. **29** (1901), pp. 118–130.

[9] Cartan, E. Les systemes de Pfaff a cinq variables et les equations aux derivees partielles du second ordre, 1911, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), pp. 109–192.

[10] Harrison B.K., Estabrook F.B., Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems, J. Math. Phys., 1971, V.12, 653–666.

[11] Hilbert, D. Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen. Math.Ann. 73, 95–108 (1912).

[12] Kersten P.H.M. The general symmety algebra structure of the underdetermined equation $u_x = (v_{xx})^2$ // J. Math. Phys. 32(8), 1991, p. 2043–2050.

[13] Lehenkyi V., Rudolph J. A characteristic prolongation for second order control systems // Preprint, IHES/M/03/54, 2003, 16 p.

[14] Lehenkyi V., Rudolph J. Towards the Group Classification of Control Systems // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — **50**, Part 1. — 170–175.

[15] Lehenkyi V., Rudolph J. On a characteristic vector field for systems reducible to order two // Proceedings of the IFAC Congress, Prague. — 2005. — 6 p.

[16] Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics / A. V. Bocharov, V. N. Chetverikov, S. V. Duzhin et al. – Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1999. – 333 p.

[17] Легенький В.І., Рудольф Й. Групові властивості систем керування третього порядку // Математические машины и системы, 2011, № 4.

[18] Strazzullo, Francesco, "Symmetry Analysis of General Rank-3 Pfaffian Systems in Five Variables"(2009). All Graduate Theses and Dissertations. Paper 449. http://digitalcommons.usu.edu/etd/449