

Інститут проблем математичних машин та систем НАН України

**Чисельні методи розв'язання рівняння адвективно-дифузійного переносу:
прикладі схем та їх тестування**

Автори:

Ківва С.Л.

м. Київ - 2017

Зміст

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | Чисельне рішення рівняння конвективної дифузії | 3 |
| 1.1 | Постановка задачі | 3 |
| 1.2 | Центрально-спрямована схема | 3 |
| 1.2.1 | Дискретизація за часом рівняння переносу | 5 |
| 1.2.2 | Дискретизація за часом конвективно-дифузійного рівняння | 6 |
| 1.3 | Лагранжево-Ейлеровий метод | 7 |
| 1.4 | Тестові приклади | 8 |
| 1.5 | Результати чисельних розрахунків | 9 |
| 1.5.1 | Обертання циліндра | 10 |
| 1.5.2 | Обертання конуса | 13 |
| 1.5.3 | Обертання пагорба | 16 |
| 1.5.4 | Вихрова деформація циліндра | 18 |
| 1.5.5 | Вихрова деформація пагорба | 21 |
| 1.5.6 | Рівняння конвективної дифузії з постійними коефіцієнтами | 23 |
| | Література | 25 |

1 Чисельне рішення рівняння конвективної дифузії

1.1 Постановка задачі

Нехай потрібно в області $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l^x, 0 \leq y \leq l^y\}$ знайти рішення рівняння:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D^x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D^y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + f(x, y, t),$$

при виконанні наступних початкових і граничних умов

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

$$h(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

1.2 Центральньо-спрямована схема

Для простоти область моделювання покривається рівномірною прямокутною сіткою (рис.

1.1) $x_i = i\Delta x$ і $y_j = j\Delta y$ з кінцевим об'ємом $V_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$. Позначимо через \bar{h}_{ij} середнє по комірці рішення рівняння, обчислене в момент часу t :

$$\bar{h}_{i,j}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} h(x, y, t) dy dx$$

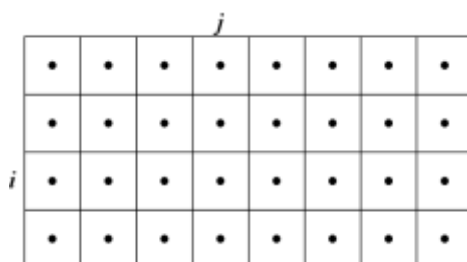


Рис.1.1. Рівномірна прямокутна сітка.

Тоді центральньо-спрямована напівдискретна форма для рівняння може бути записана у вигляді наступної системи звичайних диференціальних рівнянь [Kurganov et al., 2000; Kurganov et al., 2001]:

$$\frac{d\bar{h}_{i,j}}{dt} = -\frac{F_{i+1/2,j}^x - F_{i-1/2,j}^x}{\Delta x} - \frac{F_{i,j+1/2}^y - F_{i,j-1/2}^y}{\Delta y} + \frac{Q_{i+1/2,j}^x - Q_{i-1/2,j}^x}{\Delta x} + \frac{Q_{i,j+1/2}^y - Q_{i,j-1/2}^y}{\Delta y} + f_{i,j}$$

Дифузійні потоки будемо обчислювати наступним чином :

$$Q_{i+1/2,j}^x = D_{i+1/2,j}^x \frac{\bar{h}_{i+1,j} - \bar{h}_{i,j}}{\Delta x}$$

$$Q_{i,j+1/2}^y = D_{i,j+1/2}^y \frac{\bar{h}_{i,j+1} - \bar{h}_{i,j}}{\Delta y}$$

Конвективні члени апроксимуються за формулами

$$F_{i+1/2,j}^x = u_{i+1/2,j}^+ h_{i,j}^E + u_{i+1/2,j}^- h_{i+1,j}^W$$

$$F_{i,j+1/2}^y = v_{i,j+1/2}^+ h_{i,j}^N + v_{i,j+1/2}^- h_{i,j+1}^S$$

де

$$h_{i,j}^E = \bar{h}_{i,j} + \frac{\Delta x}{2} (h_x)_{i,j}$$

$$h_{i,j}^W = \bar{h}_{i,j} - \frac{\Delta x}{2} (h_x)_{i,j}$$

$$h_{i,j}^N = \bar{h}_{i,j} + \frac{\Delta y}{2} (h_y)_{i,j}$$

$$h_{i,j}^S = \bar{h}_{i,j} - \frac{\Delta y}{2} (h_y)_{i,j}$$

Для того, щоб конвективні члени апроксимувались з другим порядком по просторовим змінним, різницеві похідні $(h_x)_{i,j}$ і $(h_y)_{i,j}$ повинні апроксимувати відповідно похідні $h_x(x_i, y_j, t)$ та $h_y(x_i, y_j, t)$ хоча б з першим просторовим порядком. Щоб запобігти осциляції в рішенні, різницеві похідні $(h_x)_{i,j}$ та $(h_y)_{i,j}$ будемо обчислювати за формулами:

$$(h_x)_{i,j} = \min \text{mod} \left\{ \theta \frac{\bar{h}_{i,j} - \bar{h}_{i-1,j}}{\Delta x}, \frac{\bar{h}_{i+1,j} - \bar{h}_{i-1,j}}{2\Delta x}, \theta \frac{\bar{h}_{i+1,j} - \bar{h}_{i,j}}{\Delta x} \right\} \quad \theta \in [1,2]$$

$$(h_y)_{i,j} = \min \text{mod} \left\{ \theta \frac{\bar{h}_{i,j} - \bar{h}_{i,j-1}}{\Delta y}, \frac{\bar{h}_{i,j+1} - \bar{h}_{i,j-1}}{2\Delta y}, \theta \frac{\bar{h}_{i,j+1} - \bar{h}_{i,j}}{\Delta y} \right\}$$

Зауваження. 1. Якщо в формулах - покласти $(h_x)_{i,j}$ і $(h_y)_{i,j}$ рівними нулю, то отримаємо широко відомі формули апроксимації конвективних членів «вгору по потоку», а різницева формула буде відомою монотонною різницевою схемою.

2. Якщо конвективні члени рівняння апроксимуються явною різницевою схемою, то для стабільності крок за часом повинен задовольняти умові:

$$\Delta t \leq \frac{1}{4} \min \left\{ \frac{\Delta x}{\max_{i,j} |u_{i+1/2,j}|}, \frac{\Delta y}{\max_{i,j} |v_{i,j+1/2}|} \right\}$$

3. Якщо дифузійні члени рівняння апроксимуються явно, то для стабільності різницевої схеми крок за часом повинен задовольняти умові:

$$\Delta t \leq \frac{1}{4} \min \left\{ \frac{(\Delta x)^2}{\max_{i,j} D^x_{i+1/2,j}}, \frac{(\Delta y)^2}{\max_{i,j} D^y_{i,j+1/2}} \right\}$$

1.2.1 Дискретизація за часом рівняння переносу

Нехай $D^x = D^y \equiv 0$. Тоді рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = f(x, y, t),$$

а напівдискретна форма центрально-спрямованої схеми може бути представлена як

$$\frac{d\bar{h}_{i,j}}{dt} = -\frac{F^x_{i+1/2,j} - F^x_{i-1/2,j}}{\Delta x} - \frac{F^y_{i,j+1/2} - F^y_{i,j-1/2}}{\Delta y} + f_{i,j}$$

Тоді метод Ейлера першого порядку для інтегрування за часом системи рівнянь

$$\bar{h}^{n+1} = \bar{h}^n + \Delta t L(\bar{h}^n)$$

стійкий при виконанні .

В [Shu et al., 1988] були знайдені TVD схеми до третього порядку, стійкі при виконанні умови . Оптимальний метод Рунге-Кутта другого порядку задається формулами

$$h^{(1)} = h^n + \Delta t L(h^n)$$

$$h^{n+1} = \frac{1}{2}h^n + \frac{1}{2}h^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L(h^{(1)})$$

Метод Рунге-Кутта третього порядку визначається формулами

$$h^{(1)} = h^n + \Delta t L(h^n)$$

$$h^{(2)} = \frac{3}{4}h^n + \frac{1}{4}h^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(h^{(1)})$$

$$h^{n+1} = \frac{1}{3}h^n + \frac{2}{3}h^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(h^{(2)})$$

1.2.2 Дискретизація за часом конвективно-дифузійного рівняння

Якщо конвективні і дифузійні члени в рівнянні апроксимуються явно, то тоді для інтегрування системи рівнянь можна використовувати один з методів , або . Далі будемо припускати, що конвективні члени апроксимуються явно, а дифузійні - неявно. Тоді систему рівнянь можна представити у вигляді

$$\frac{dh}{dt} = F(h,t) + G(h,t)$$

де $F(h,t)$ і $G(h,t)$ явна та неявна апроксимація правої частини . Для чисельного інтегрування системи рівнянь за часом будемо застосовувати неявно-явний метод Рунге-Кутта (IMEXRK). IMEX Рунге-Кутта можна представити подвійною таблицею Бутчера

$$\begin{array}{c|c} \tilde{c} & \tilde{A} \\ \hline c & b \end{array} \quad \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline c & b \end{array}$$

де \tilde{c} , \tilde{A} , \tilde{b} описують явну частину, а c , A , b - неявну частину методу.

Тоді маємо

$$h^{(i)} = h^n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} F(h^{(j)}, t^n + \tilde{c}_j \Delta t) + \Delta t \sum_{j=1}^i a_{ij} G(h^{(j)}, t^n + c_j \Delta t), \quad i = 1, \dots, s$$

$$h^{n+1} = h^n + \Delta t \sum_{i=1}^s \tilde{b}_i F(h^{(i)}, t^n + \tilde{c}_i \Delta t) + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i G(h^{(i)}, t^n + c_i \Delta t)$$

Для чисельного інтегрування системи будемо використовувати метод IMEXRK другого порядку [Carpenter et al., 2003]

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\
1 & 1/4 & 3/4 & 0 \\
\hline
& 1/4 & 3/4 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
2/3 & -1/3 + \sqrt{2}/2 & 1 - \sqrt{2}/2 & 0 \\
1 & 3/4 - \sqrt{2}/4 & -3/4 + 3\sqrt{2}/4 & 1 - \sqrt{2}/2 \\
\hline
& 3/4 - \sqrt{2}/4 & -3/4 + 3\sqrt{2}/4 & 1 - \sqrt{2}/2
\end{array}$$

1.3 Лагранжево-Ейлеровий метод

Розкладаючи рівняння по фізичним процесам, використовуючи метод Стренга [Strang, 1968], рішення рівняння конвективної дифузії зводиться до послідовного вирішення дифузійного рівняння

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D^{\varepsilon_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + f(x, t)$$

та рівняння переносу

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i h) = 0$$

Будемо припускати, що рідина нестислива. Для вирішення рівняння переносу застосуємо лагранжевий метод. Тоді рівняння замінюється системою [Chertock et al., 2008]

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = u_i$$

Позначимо через L_D і L_C різницеві оператори дифузійної і конвективної частин рівняння. Використовуючи метод Стренга, чисельне рішення рівняння конвективної дифузії з першим порядком апроксимації за часом можна записати у вигляді

$$h(t + \Delta t) = L_C(\Delta t)L_D(\Delta t),$$

а другого порядку

$$h(t + \Delta t) = L_C(\Delta t/2)L_D(\Delta t)L_C(\Delta t/2)$$

Для лагранжевого методу ми будемо використовувати ейлерову сітку. Знаючи координати вузлів сітки в момент часу t , знаходимо їх значення в момент часу $t + \Delta t$. За цими новими значеннями виконуємо триангуляцію області моделювання, і лінійною інтерполяцією проектуємо ці значення $h(x_i(t + \Delta t), t + \Delta t)$ в вузли ейлерової сітки.

1.4 Тестові приклади

Зазвичай для тестування різницевих схем, чисельного розв'язку рівняння переносу, використовують задачі про обертання і деформацію різних твердих тіл. Ми будемо моделювати обертання по колу (один оборот) щодо центру області моделювання твердого тіла або його вихреву деформацію. Область моделювання являє собою одиничний квадрат. У початковий момент часу тверде тіло розташоване в точці $(x_0, y_0) = (0.5, 0.75)$. Кінцевий час розрахунку $T=1$. В якості твердого тіла може бути:

1. Циліндр радіуса 0.15 з прямокутним вирізом. Висота циліндра дорівнює 3. На рис. 1.2 показан вид зверху.
2. Конус з діаметром основи 0.3 і висотою 3.
3. Пагорб, який описується рівнянням

$$h(x, y) = \frac{1}{4}(1 + \cos(\pi r(x, y))),$$

де

$$r(x, y) = \frac{\min(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, r_0)}{r_0} \quad \text{и} \quad r_0 = 0.2$$

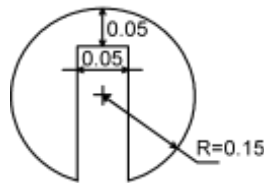


Рис.1.2. Вид зверху

При обертанні твердого тіла по колу (рис.1.3) швидкість постійна і задається співвідношеннями:

$$u = -2\pi(y - 0.5);$$

$$v = 2\pi(x - 0.5)$$

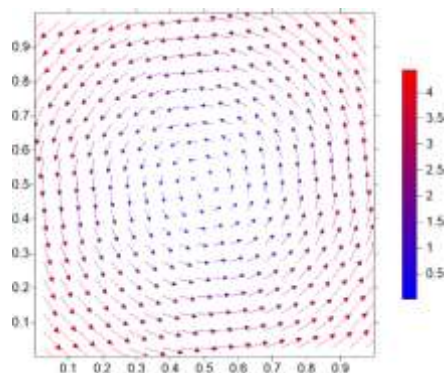


Рис.1.3. Швидкості руху рідини в тесті обертання твердого тіла.

При вихровій деформації швидкість змінюється в часі (рис.1.4) і визначається співвідношеннями:

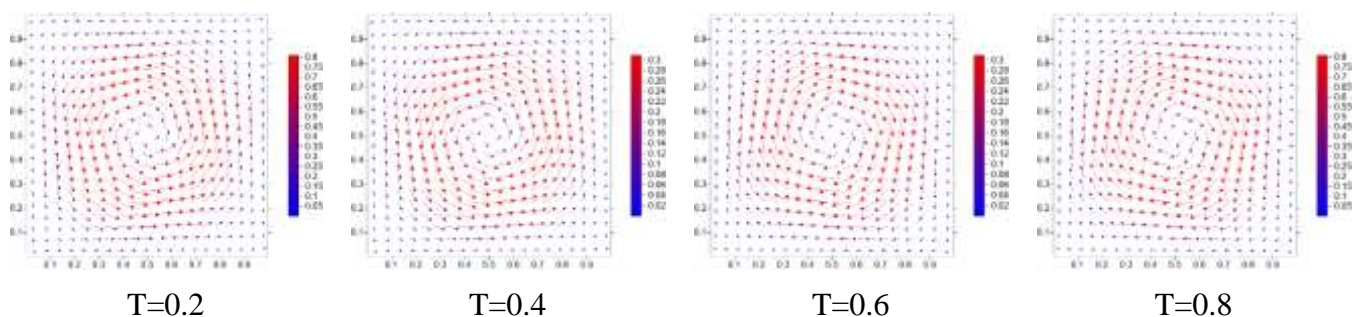


Рис.1.4. Швидкості руху рідини в різні моменти часу в тесті вихрової деформації твердого тіла.

$$u = \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) g(t)$$

$$v = -\sin^2(\pi y) \sin(2\pi x) g(t)$$

$$g(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

1.5 Результати чисельних розрахунків

Всі розрахунки в тестах на обертання і вихреву деформацію твердих тіл виконуються на трьох сітках: 100x100, 200x200 і 400x400. Для кожного розрахунку обчислюються наступні величини:

- $\min_{\Omega} h(x, y, T) \quad ; \quad \max_{\Omega} h(x, y, T)$

- $\|h - h_0\|_{L^\infty} = \max_{\Omega} |h(x, y, T) - h(x, y, 0)|$
- $\|h - h_0\|_{L^1} = \Delta x \Delta y \sum_{\Omega} |h(x, y, T) - h(x, y, 0)|$
- $\|h - h_0\|_{L^2} = \sqrt{\Delta x \Delta y \sum_{\Omega} [h(x, y, T) - h(x, y, 0)]^2}$

За результатами цих розрахунків обчислюється відношення $n = \ln(R(2\Delta x)/R(\Delta x))/\ln(2)$, де $R(\Delta x)$ - похибка різницевої схеми на сітці з кроком Δx .

1.5.1 Обертання циліндра

Моделювалося обертання циліндра за допомогою монотонної схеми, центрально-спрямованої схеми першого і другого порядку апроксимації за часом та методу частинок. Результати моделювання показані на рис.1.5-1.8 і наведені в таблицях 1.1-1.4.

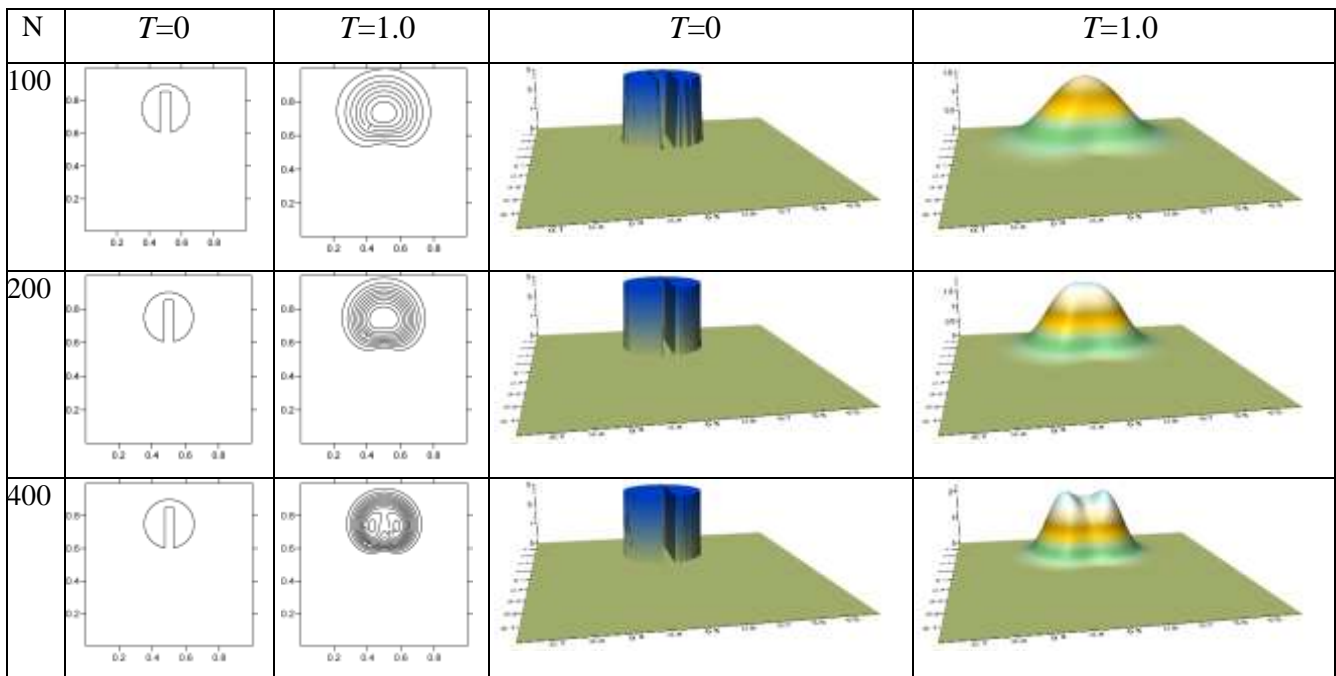


Рис.1.5. Результати розрахунку обертання циліндра за допомогою монотонної схеми , , -.

| N | T=0 | T=1.0 | T=0 | T=1.0 |
|---|-----|-------|-----|-------|
|---|-----|-------|-----|-------|

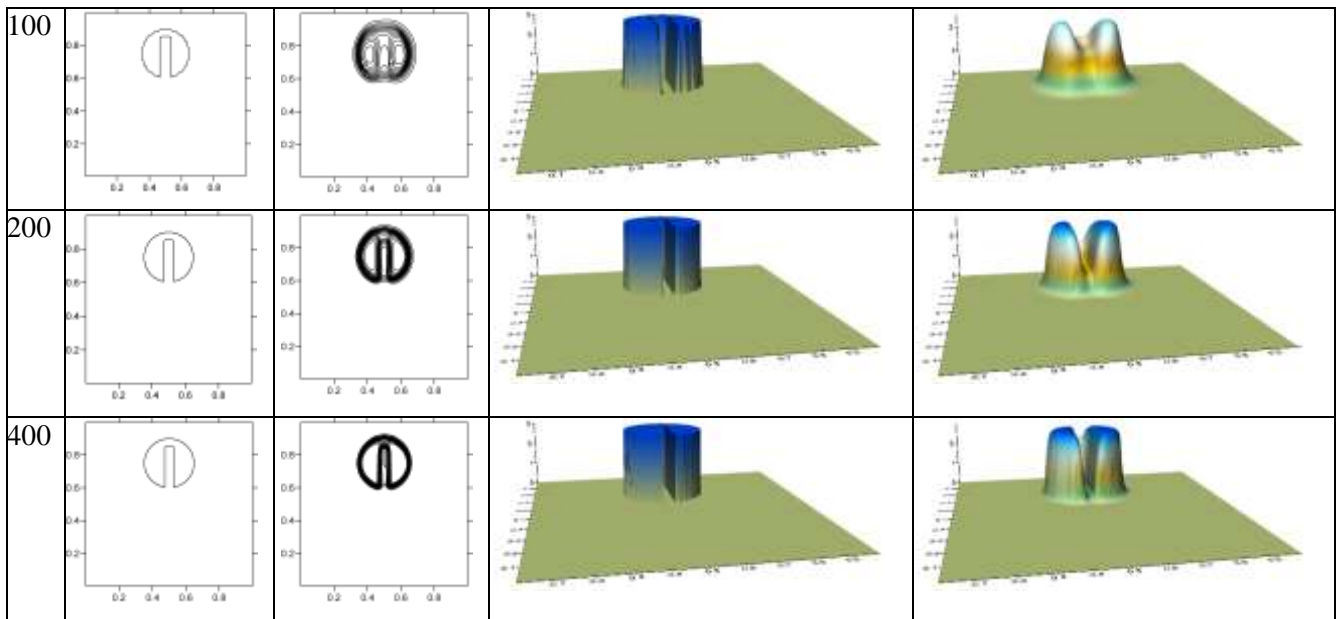


Рис.1.6. Результати розрахунку обертання циліндра за допомогою центрально-спрямованої схеми , - з першим порядком апроксимації за часом.

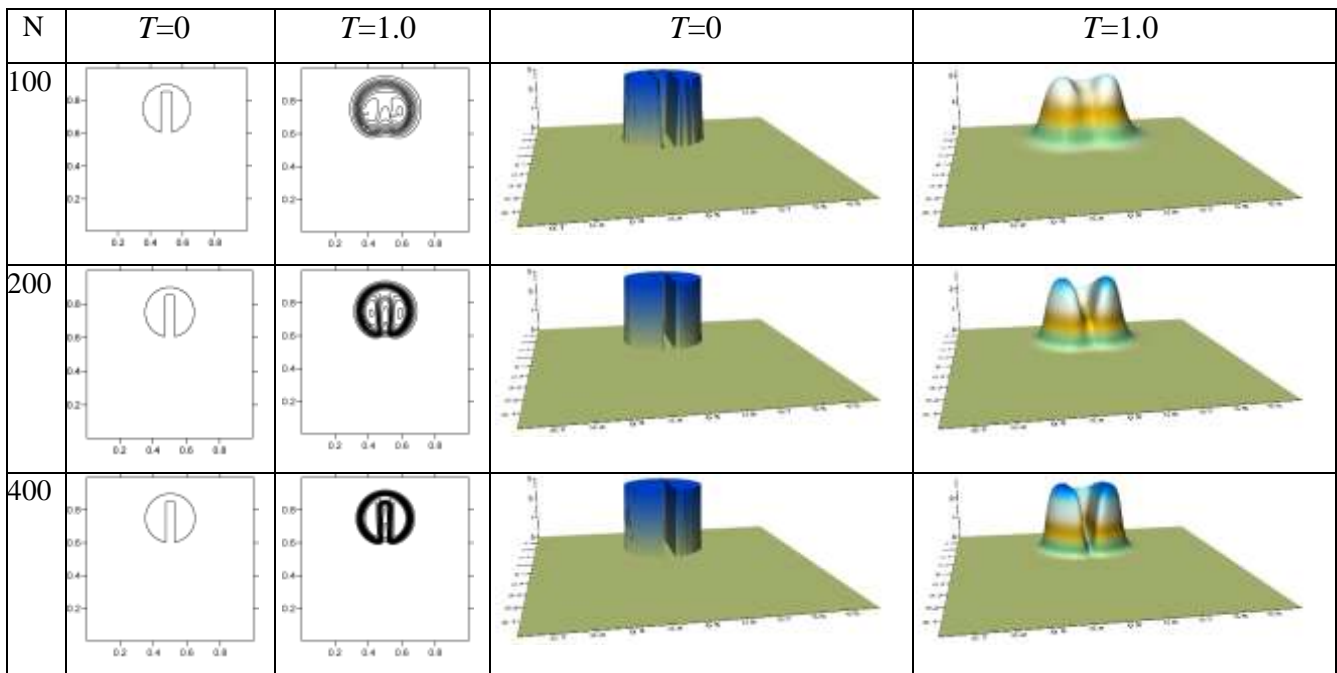


Рис.1.7. Результати розрахунку обертання циліндра за допомогою центрально-спрямованої схеми , - з другим порядком апроксимації за часом.

| N | $T=0$ | $T=1.0$ | $T=0$ | $T=1.0$ |
|---|-------|---------|-------|---------|
|---|-------|---------|-------|---------|

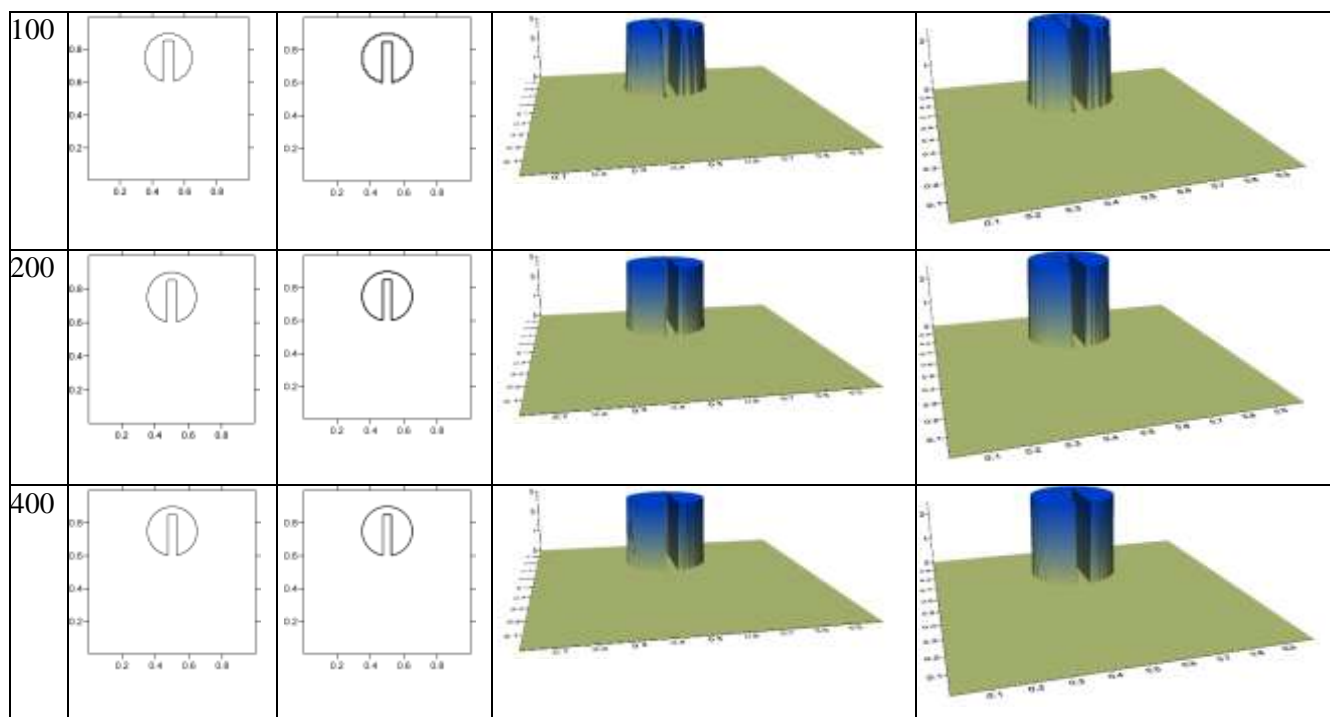


Рис.1.8. Результати розрахунку обертання циліндра за допомогою методу частинок , .

Таблиця 1.1. Похибки моделювання обертання циліндра з використанням монотонної схеми.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|---------------|------------------------|-----------|------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -5.22 | 1.1×10^{-18} | 1.580 | 2.2791 | | 0.2020 | | 0.5110 | |
| 200 | -1.38 | 1.05×10^{-35} | 1.999 | 2.2063 | 0.0468 | 0.1725 | 0.2278 | 0.4577 | 0.1589 |
| 400 | -0.22 | 1.5×10^{-69} | 2.272 | 2.3299 | -0.0786 | 0.1415 | 0.2858 | 0.4040 | 0.1800 |

Таблиця 1.2. Похибки моделювання обертання циліндра з використанням центрально-спрямованої схеми першого порядку апроксимації за часом.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|---------------|------------------------|-----------|------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.10 | 2.18×10^{-31} | 2.534 | 2.3701 | | 0.1110 | | 0.3460 | |
| 200 | -0.00 | 8.62×10^{-49} | 2.970 | 2.2968 | 0.0453 | 6.4197e-2 | 0.790 | 0.2462 | 0.4909 |
| 400 | -0.00 | 1.24×10^{-82} | 2.9999 | 2.5413 | -0.1459 | 3.4813e-2 | 0.883 | 0.1721 | 0.5166 |

Таблиця 1.3. Похибки моделювання обертання циліндра з використанням центрально-спрямованої схеми з другим порядком апроксимації за часом.

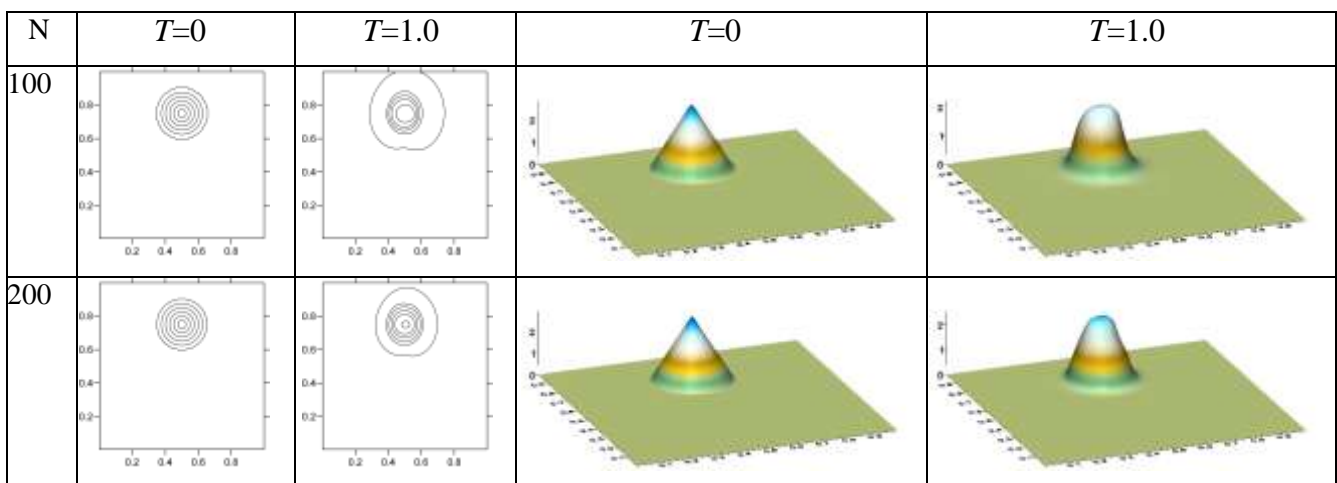
| N | Дисбаланс, % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|--------------|------------------------|-----------|------------------|---------------|-------------------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.09 | 3.10×10^{-28} | 2.222 | 2.4349 | | 0.1316 | | 0.3890 | |
| 200 | -0.00 | 6.27×10^{-46} | 2.824 | 2.347 | 0.0530 | 8.6361×10^{-2} | 0.608 | 0.2937 | 0.4054 |
| 400 | -0.00 | 1.04×10^{-77} | 2.9882 | 2.4274 | -0.0486 | 5.4171×10^{-2} | 0.673 | 0.2183 | 0.4280 |

Таблиця 1.4. Похибки моделювання обертання циліндра з використанням методу частинок.

| N | Дисбаланс, % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|--------------|-----------|-----------|-------------------------|---------------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|
| 100 | -0.00 | 0.0 | 3.0 | 9.049×10^{-11} | | 6.515×10^{-13} | | 5.988×10^{-12} | |
| 200 | -0.00 | 0.0 | 3.0 | 3.047×10^{-10} | | 1.085×10^{-12} | | 1.421×10^{-11} | |
| 400 | -0.00 | 0.0 | 3.0 | 5.612×10^{-10} | | 9.988×10^{-13} | | 1.849×10^{-11} | |

1.5.2 Обертання конуса

Моделювалося обертання циліндра за допомогою центрально-спрямованої (першого і другого порядку апроксимації за часом) схем і методу частинок. Результати моделювання показані на рис.1.9-1.11, похибки розрахунків наведені в таблицях 1.5-1.7.



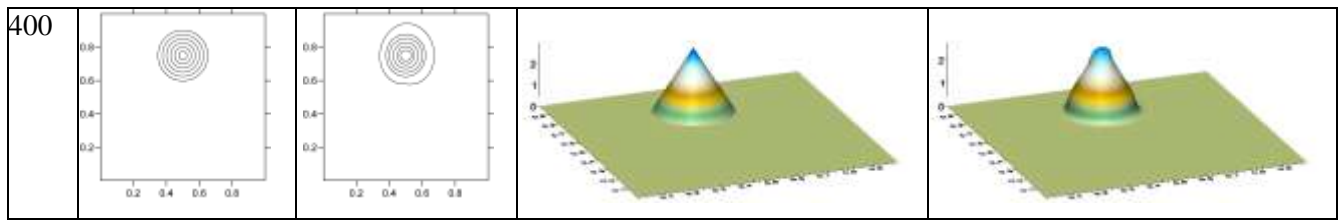


Рис.1.9. Результати розрахунку обертання конуса за допомогою центрально-спрямованої схеми , , - з першим порядком апроксимації за часом.

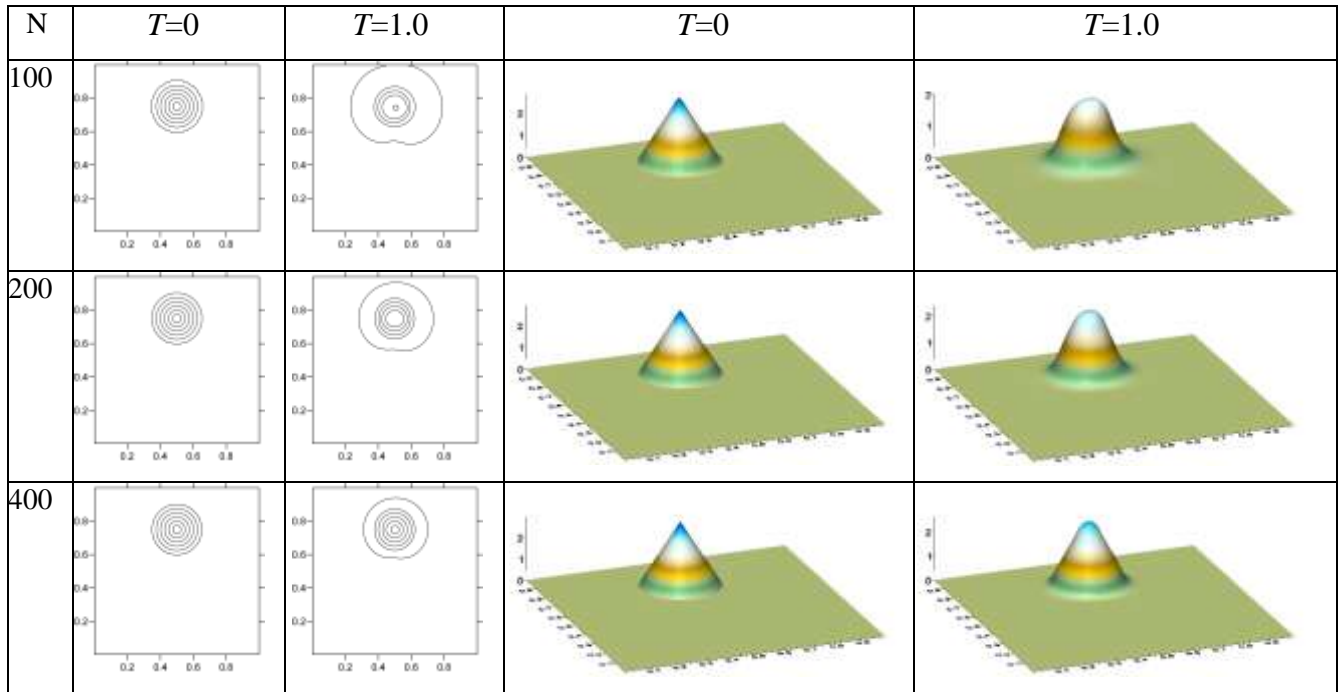
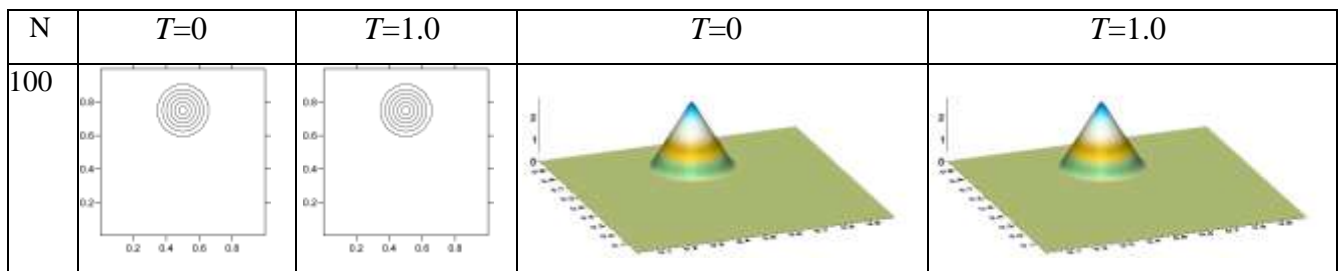


Рис.1.10. Результати розрахунку обертання конуса за допомогою центрально-спрямованої схеми , , - з другим порядком апроксимації за часом.



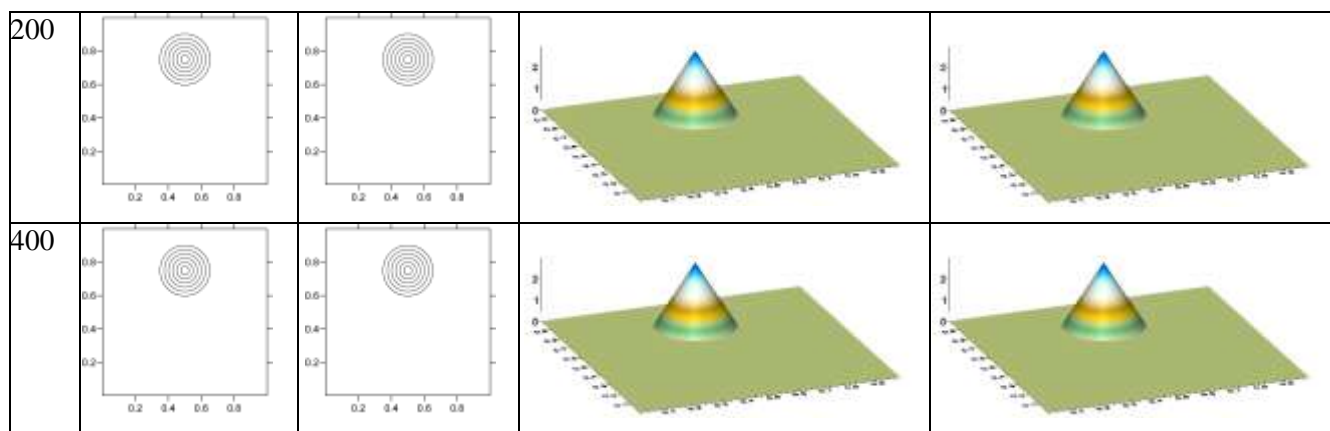


Рис.1.11. Результати розрахунку обертання конуса за допомогою методу частинок , .

Таблиця 1.5. Похибки моделювання обертання конуса з використанням центрально-спрямованої схеми першого порядку апроксимації за часом.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | L^∞ error | $n(L^\infty)$ | L^1 error | $n(L^1)$ | L^2 error | $n(L^2)$ |
|-----|------------------|------------------------|-----------|---------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.02 | 5.16×10^{-32} | 2.213 | 0.6512 | | 1.2629e-2 | | 4.8462e-2 | |
| 200 | -0.00 | 1.55×10^{-49} | 2.529 | 0.4027 | 0.693 | 9.0340e-3 | 0.483 | 3.8371e-2 | 0.337 |
| 400 | -0.00 | 1.61×10^{-83} | 2.720 | 0.2517 | 0.678 | 4.3619e-3 | 1.050 | 2.1930e-2 | 0.807 |

Таблиця 1.6. Похибки моделювання обертання конуса з використанням центрально-спрямованої схеми з другим порядком апроксимації за часом.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | L^∞ error | $n(L^\infty)$ | L^1 error | $n(L^1)$ | L^2 error | $n(L^2)$ |
|-----|------------------|------------------------|-----------|---------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.015 | 2.62×10^{-29} | 2.009 | 0.8578 | | 1.3605e-2 | | 5.1789e-2 | |
| 200 | -0.000 | 1.16×10^{-46} | 2.380 | 0.5528 | 0.634 | 6.3314e-3 | 1.104 | 2.5047e-2 | 1.048 |
| 400 | -0.000 | 1.45×10^{-78} | 2.606 | 0.3596 | 0.620 | 2.4748e-3 | 1.355 | 1.1688e-2 | 1.099 |

Таблиця 1.7. Похибки моделювання обертання конуса з використанням методу частинок.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | L^∞ error | $n(L^\infty)$ | L^1 error | $n(L^1)$ | L^2 error | $n(L^2)$ |
|-----|------------------|-----------|-----------|------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.00 | 0.0 | 2.8586 | 4.874e-14 | | 1.476e-15 | | 6.229e-15 | |
| 200 | -0.00 | 0.0 | 2.9293 | 3.375e-14 | | 6.142e-16 | | 2.843e-15 | |

| | | | | | | | | |
|----|-------|-----|--------|-----------|--|-----------|--|-----------|
| 0 | | | | | | | | |
| 40 | -0.00 | 0.0 | 2.9646 | 4.996e-14 | | 1.070e-15 | | 4.689e-15 |
| 0 | | | | | | | | |

1.5.3 Обертання пагорба

Моделювалося обертання пагорба, використовуючи централь-спрямовану (першого і другого порядку апроксимації за часом) схеми і метод частинок. Результати моделювання показані на рис.1.12-1.14, похибки розрахунків наведені в таблицях 1.8-1.10.

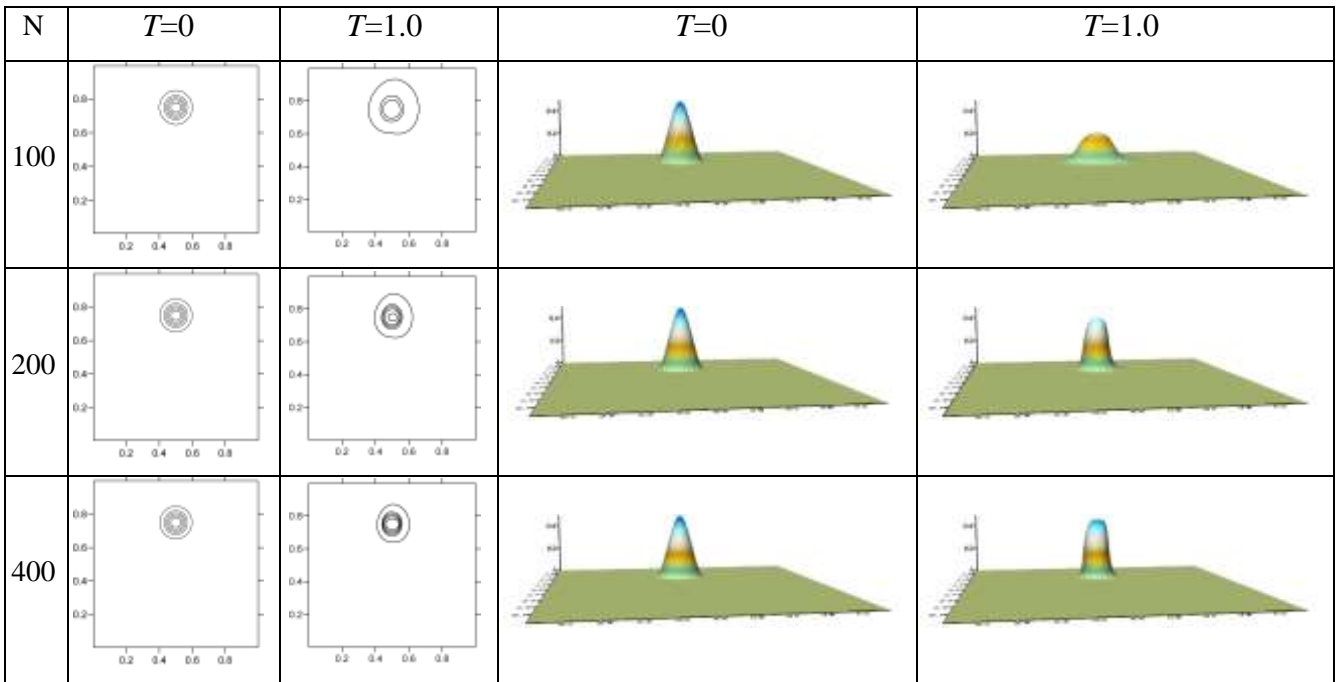
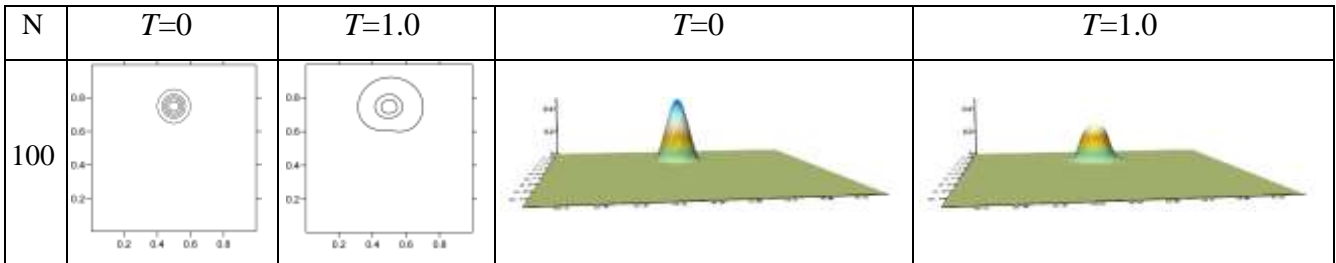


Рис.1.12. Результати розрахунку обертання пагорба централь-спрямованої схемою , , - з першим порядком апроксимації за часом.



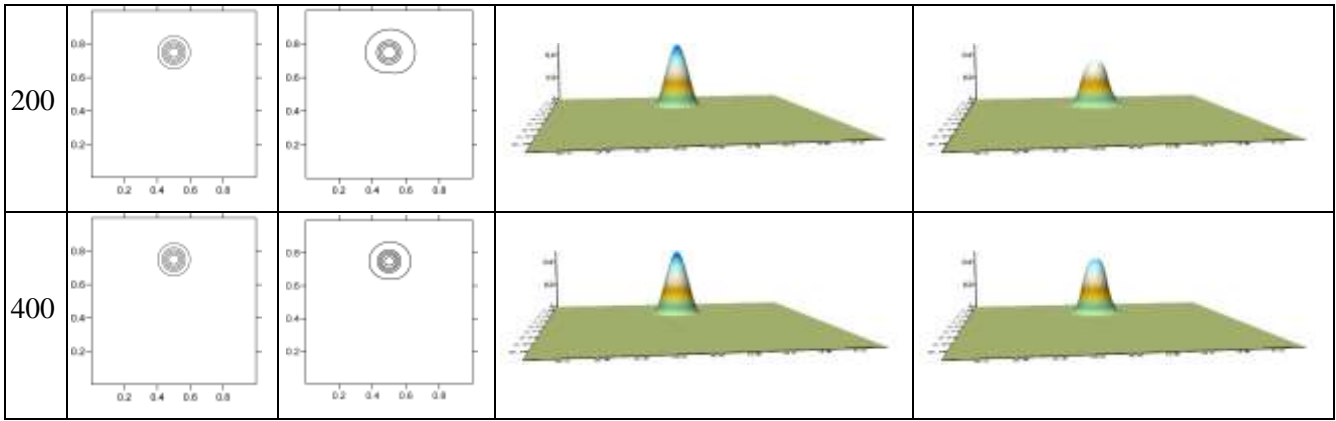


Рис.1.13. Результати розрахунку обертання пагорба центрально-спрямованої схемою , , - з другим порядком апроксимації за часом.

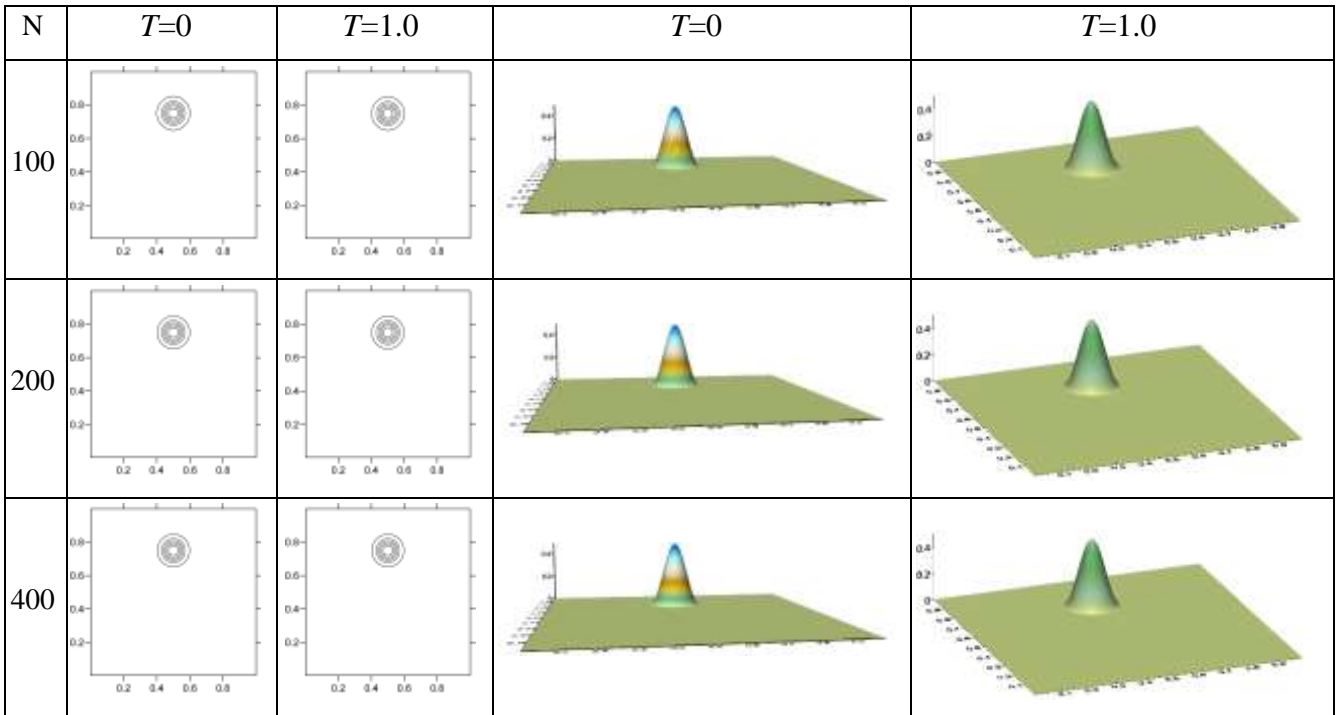


Рис.1.14. Результати розрахунку обертання пагорба методом частинок , .

Таблиця 1.8. Похибки моделювання обертання пагорба з використанням центрально-спрямованої схеми першого порядку апроксимації за часом.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|---------|------------------|------------------------|-----------|------------------|---------------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|
| 10 0 | -0.00 | 5.16×10^{-34} | 0.283 | 0.2124 | | 1.8931×10^{-3} | | 1.2069×10^{-2} | |

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|------------------------|-------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|
| 200 | -0.00 | 3.11×10^{-53} | 0.416 | 8.3277e-2 | 1.3508 | 8.0847e-4 | 1.2275 | 5.2730e-3 | 1.1946 |
| 400 | -0.00 | 1.25×10^{-90} | 0.469 | 8.7489e-2 | -0.0712 | 8.4270e-4 | -0.0598 | 6.0490e-3 | -0.1981 |

Таблиця 1.9. Похибки моделювання обертання пагорба з використанням центрально-спрямованої схеми з другим порядком апроксимації за часом.

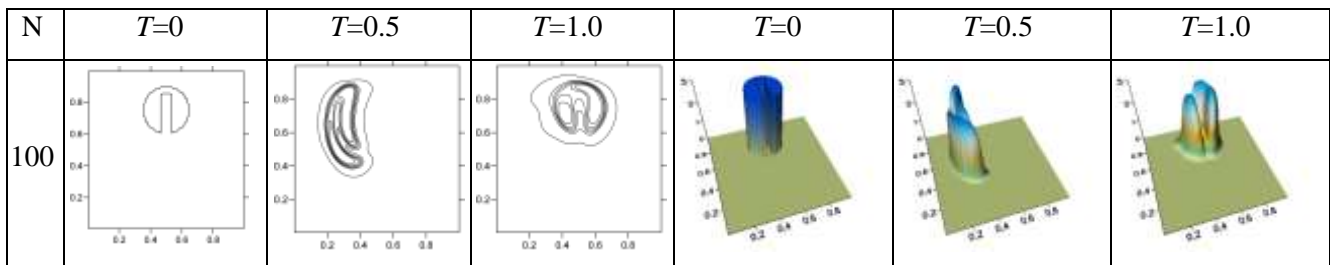
| N | Дисбаланс, % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|--------------|------------------------|-----------|------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.00 | 5.39×10^{-32} | 0.236 | 0.2594 | | 2.7502e-3 | | 1.6152e-2 | |
| 200 | -0.00 | 5.44×10^{-50} | 0.367 | 0.1319 | 0.9757 | 1.0217e-3 | 1.4286 | 6.5448e-3 | 1.3033 |
| 400 | -0.00 | 7.32×10^{-85} | 0.442 | 5.8463e-2 | 1.1738 | 3.4081e-4 | 1.5839 | 2.2648e-3 | 1.5310 |

Таблиця 1.10. Похибки моделювання обертання пагорба з використанням методу частинок.

| N | Дисбаланс, % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|--------------|-----------|-----------|------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.00 | 0.0 | 0.4939 | 1.837e-14 | | 1.608e-16 | | 1.149e-15 | |
| 200 | -0.00 | 0.0 | 0.4985 | 1.163e-14 | | 7.015e-17 | | 5.448e-16 | |
| 400 | -0.00 | 0.0 | 0.4996 | 1.743e-14 | | 1.179e-16 | | 8.632e-16 | |

1.5.4 Вихрова деформація циліндра

Моделювалася вихрова деформація циліндра, використовуючи центрально-спрямовані (першого і другого порядку апроксимації за часом) схеми і метод частинок. Результати моделювання показані на рис.1.15-1.17, похибки розрахунків наведені в таблицях 1.11-1.13.



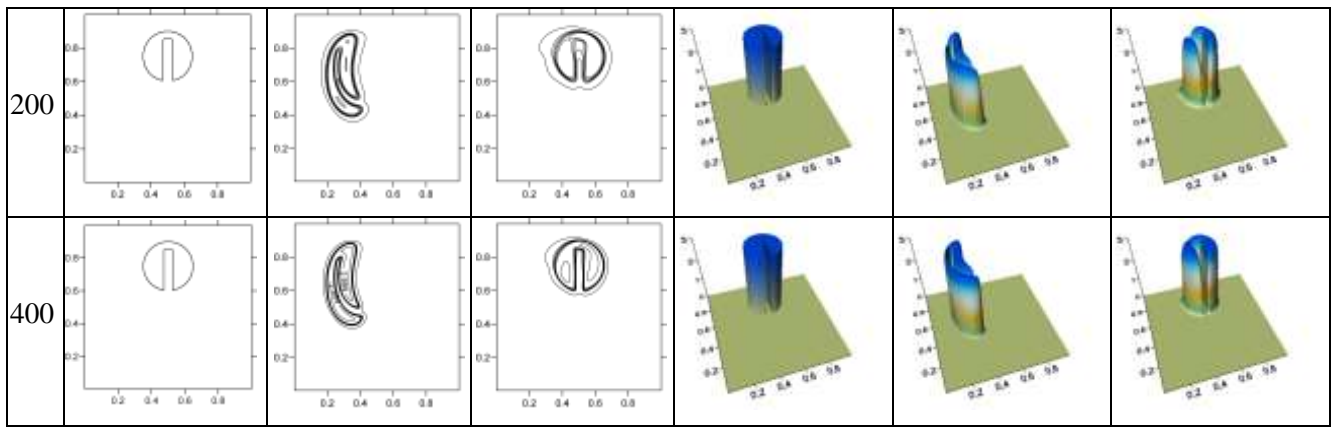


Рис.1.15. Результати розрахунку вихрової деформації циліндра центрально-спрямованою схемою , , - з першим порядком апроксимації за часом.

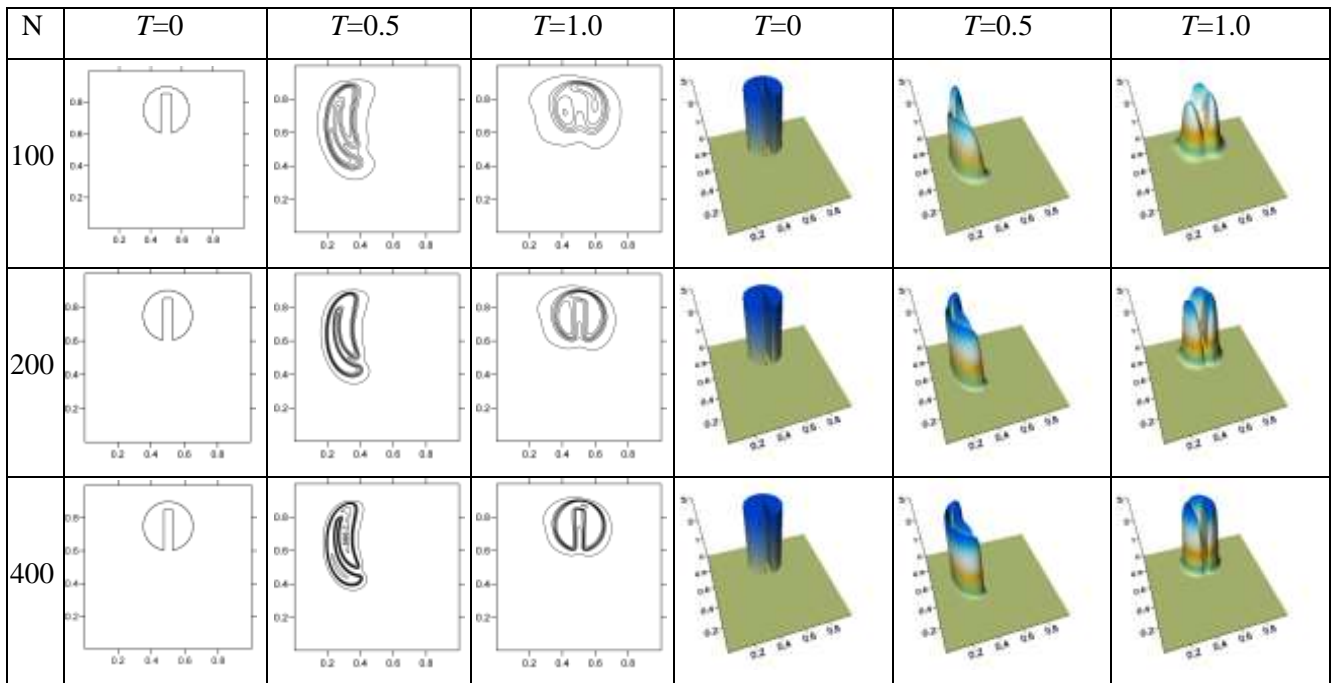
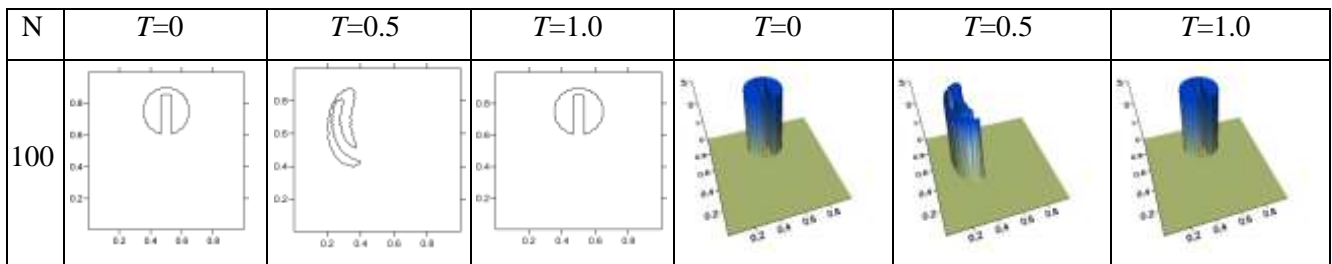


Рис.1.16. Результати розрахунку вихрової деформації циліндра центрально-спрямованою схемою , , - з другим порядком апроксимації за часом.



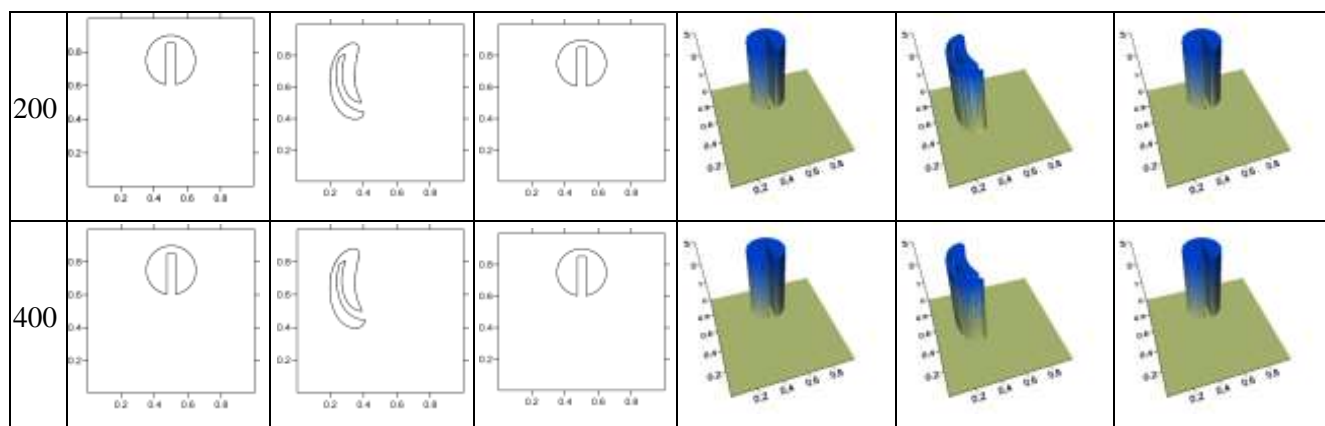


Рис.1.17. Результати розрахунку вихрової деформації циліндра методом частинок , .

Таблиця 1.11. Похибки моделювання вихрової деформації циліндра з використанням центрально-спрямованої схеми першого порядку апроксимації за часом.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | $L^{\infty} error$ | $n(L^{\infty})$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|---------------|-------------------------|-----------|--------------------|-----------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.00 | 4.32×10^{-126} | 2.887 | 2.4306 | | 8.0568e-2 | | 0.2918 | |
| 200 | -0.00 | 7.83×10^{-262} | 2.997 | 2.3920 | 0.023 | 4.5717e-2 | 0.817 | 0.2111 | 0.467 |
| 400 | -0.00 | 0.0 | 3.0 | 2.5242 | -0.077 | 2.4948e-2 | 0.874 | 0.1541 | 0.454 |

Таблиця 1.12. Похибки моделювання вихрової деформації циліндра з використанням центрально-спрямованої схеми з другим порядком апроксимації за часом.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | $L^{\infty} error$ | $n(L^{\infty})$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|---------------|-------------------------|-----------|--------------------|-----------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.00 | 4.53×10^{-109} | 2.774 | 2.4759 | | 0.1032 | | 0.3380 | |
| 200 | -0.00 | 5.50×10^{-223} | 2.978 | 2.4303 | 0.027 | 6.6255e-2 | 0.639 | 0.2550 | 0.407 |
| 400 | -0.00 | 0.0 | 2.999 | 2.4920 | -0.036 | 4.1570e-2 | 0.673 | 0.1926 | 0.405 |

Таблиця 1.13. Похибки моделювання вихрової деформації циліндра з використанням методу частинок.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | $L^{\infty} error$ | $n(L^{\infty})$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|---------------|-----------|-----------|--------------------|-----------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 100 | -0.00 | 0.0 | 3.0 | 7.827e-13 | | 4.055e-15 | | 3.754e-14 | |

| | | | | | | | | | |
|---------|-------|-----|-----|-----------|--|-----------|--|-----------|--|
| 20 0 | -0.00 | 0.0 | 3.0 | 1.166e-12 | | 3.965e-15 | | 5.220e-14 | |
| 40 0 | -0.00 | 0.0 | 3.0 | 3.064e-12 | | 3.989e-15 | | 7.352e-14 | |

1.5.5 Вихрова деформація пагорба

Моделювалася вихрова деформація пагорба, використовуючи центрально-спрямовані (першого і другого порядку апроксимації за часом) схеми і метод частинок. Результати моделювання показані на рис.1.18-1.20, похибки розрахунків наведені в таблицях 1.14-1.16.

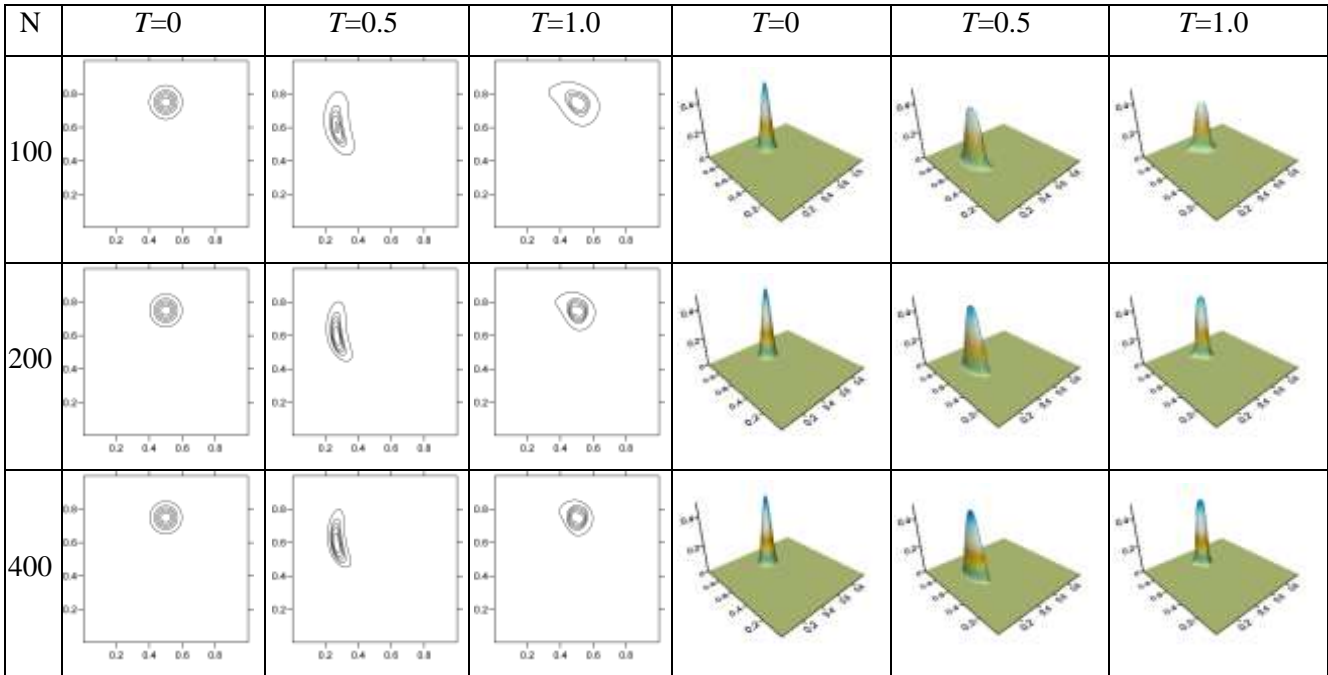
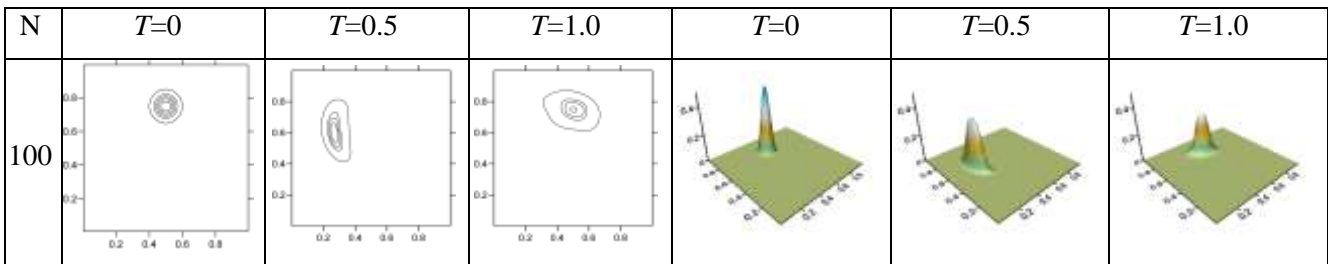


Рис.1.18. Результати розрахунку вихрової деформації пагорба центрально-спрямованою схемою , , - з першим порядком апроксимації за часом.



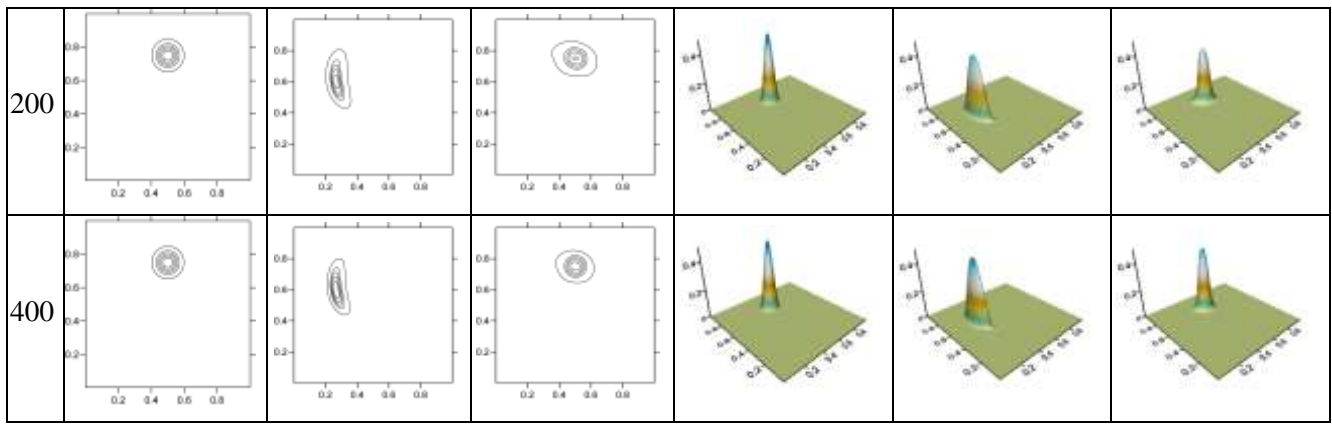


Рис.1.19. Результати розрахунку вихрової деформації пагорба центральньо-спрямованою схемою , , - з другим порядком апроксимації за часом.

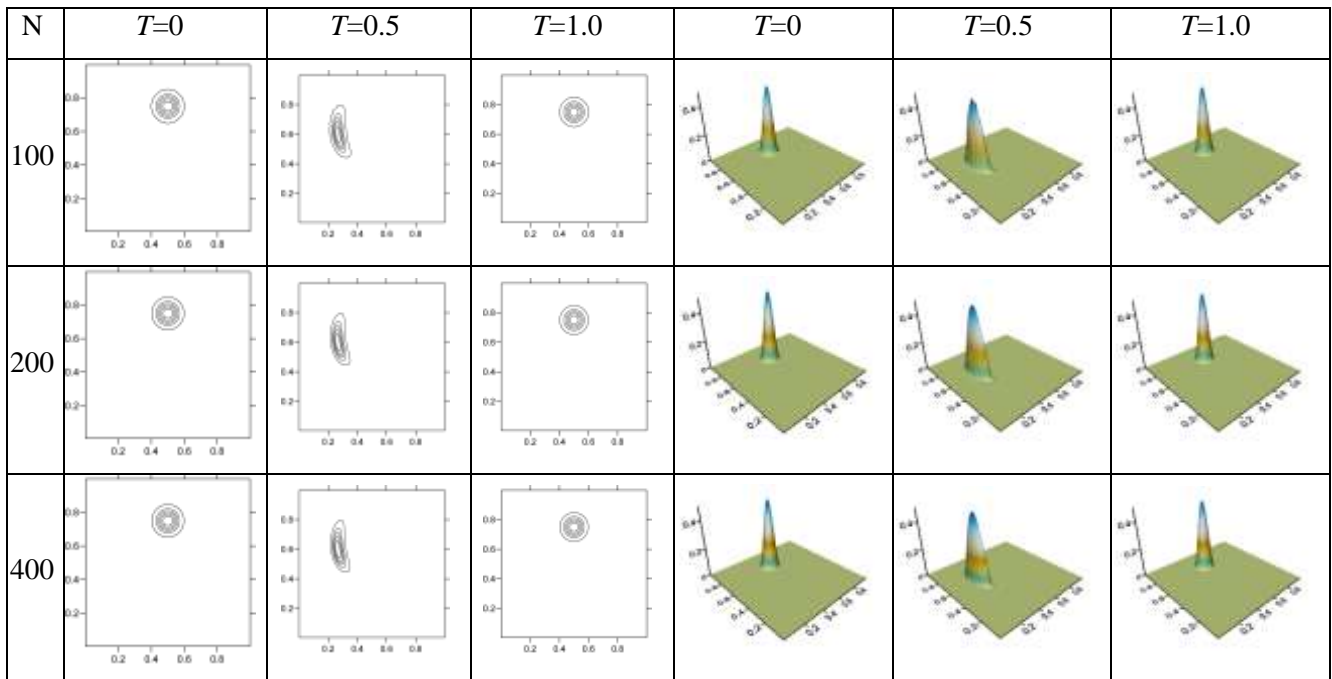


Рис.1.20. Результати розрахунку вихрової деформації пагорба методом частинок , , .

Таблиця 1.14. Похибки моделювання вихрової деформації пагорба з використанням центральньо-спрямованої схеми першого порядку апроксимації за часом.

| N | Дисбаланс , % | h_{min} | h_{max} | $L^{\infty} error$ | $n(L^{\infty})$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|-----|---------------|-------------------------|-----------|--------------------|-----------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 10 | -0.00 | 3.88×10^{-137} | 0.368 | 0.1374 | | 1.5353e-3 | | 9.8622e-3 | |
| 0 | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---------|-------|-------------------------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|
| 20 0 | -0.00 | 6.10x10 ⁻²⁸² | 0.453 | 0.1213 | 0.180 | 8.0764e-4 | 0.927 | 6.3300e-3 | 0.640 |
| 40 0 | -0.00 | 0.0 | 0.484 | 9.2386e-2 | 0.393 | 6.7301e-4 | 0.263 | 5.3222e-3 | 0.250 |

Таблиця 1.15. Похибки моделювання вихрової деформації пагорба з використанням центрально-спрямованої схеми з другим порядком апроксимації за часом.

| N | Дисбаланс, % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|---------|--------------|-------------------------|-----------|------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 10 0 | -0.00 | 3.28x10 ⁻¹¹⁶ | 0.307 | 0.1877 | | 2.0805e-3 | | 1.2554e-2 | |
| 20 0 | -0.00 | 1.98x10 ⁻²⁴⁰ | 0.407 | 9.1411e-2 | 1.038 | 8.6987e-4 | 1.258 | 5.4394e-3 | 1.207 |
| 40 0 | -0.00 | 0.0 | 0.460 | 4.0019e-2 | 1.192 | 3.6156e-4 | 1.267 | 2.3777e-3 | 1.194 |

Таблиця 1.16. Похибки моделювання вихрової деформації циліндра з використанням методу частинок.

| N | Дисбаланс, % | h_{min} | h_{max} | $L^\infty error$ | $n(L^\infty)$ | $L^1 error$ | $n(L^1)$ | $L^2 error$ | $n(L^2)$ |
|---------|--------------|-----------|-----------|------------------|---------------|-------------|----------|-------------|----------|
| 10 0 | -0.00 | 0.0 | 0.494 | 1.449e-14 | | 1.306e-16 | | 9.295e-16 | |
| 20 0 | -0.00 | 0.0 | 0.498 | 1.460e-14 | | 1.292e-16 | | 9.196e-16 | |
| 40 0 | -0.00 | 0.0 | 0.4996 | 1.477e-14 | | 1.317e-16 | | 9.376e-16 | |

1.5.6 Рівняння конвективної дифузії з постійними коефіцієнтами

В якості тестової задачі будемо розглядати рішення початково-крайової задачі для рівняння конвективної дифузії з постійними коефіцієнтами

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], \quad t > 0$$

$$h(x, 0) = \varphi(x)$$

$$h(0, t) = 0$$

$$h(l, t) = 0$$

Рішення задачі - можна представити у вигляді

$$h(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-(\pi i/l)^2 \alpha t} \sin \frac{\pi i}{l} x$$

$$\varphi(x) = e^{\alpha x + \beta t} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin \frac{\pi i}{l} x$$

$$c_i = \frac{2}{l} \int_0^l e^{-\alpha \xi - \beta t} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi i}{l} \xi d\xi$$

де $\alpha = u/(2\varepsilon)$ і $\beta = -u^2/(4\varepsilon)$.

Нехай $u = 0.1$, $\varepsilon = 0.005$, $l = 1$ і

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2 \sin(5\pi(x - 0.3)), & 0.3 \leq x \leq 0.5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Центрально-спрямовані схеми першого і другого порядків апроксимації за часом, - і відповідно, - будемо використовувати для чисельного рішення задачі -. Область моделювання покривалася сіткою, що складається зі 100 осередків. Порівняння чисельних результатів розрахунку з аналітичним рішенням показано на рис.1.21.

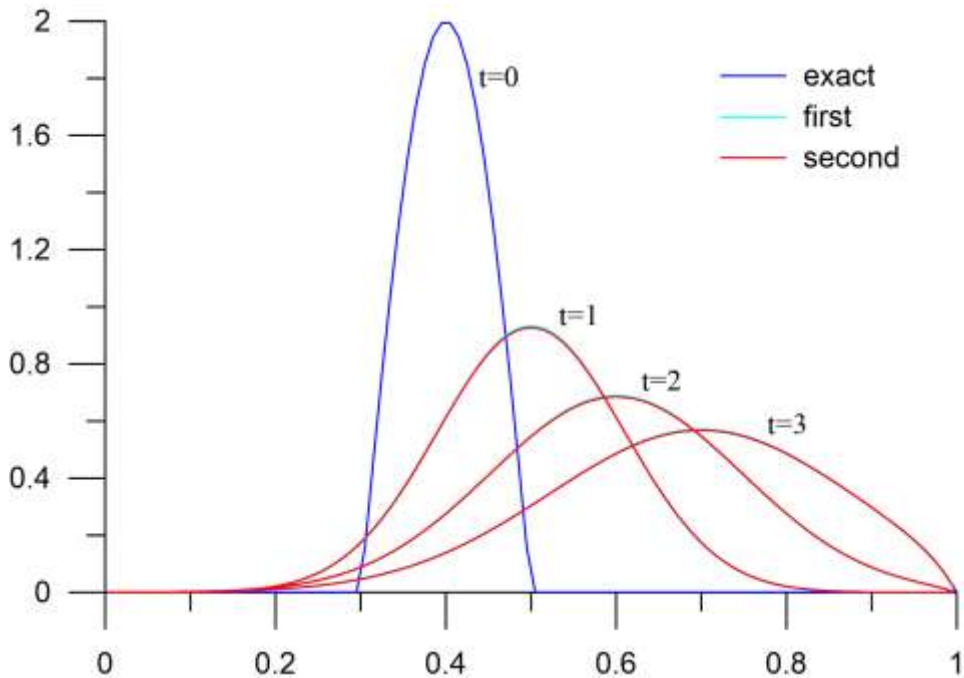


Рис.1.21. Порівняння результатів розрахунку конвективної дифузії з постійними коефіцієнтами з аналітичними рішеннями в різні моменти часу, отриманими з використанням центрально-спрямованих схем першого і другого порядку апроксимації за часом.

Література

1. Carpenter M.H., Kennedy C.A., Additive Runge-Kutta schemes for convection-diffusion-reaction equations *Appl. Numer. Math.* , 44, no. 1-2, 139-181. (2003)
2. Chertock A., Kashdan E., Kurganov A. Propagation of diffusing pollutant by a hybrid Eulerian-Lagrangian method. *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, 371-379 (2008)
3. Kurganov A., Levy D. A Third-Order Semidiscrete Central Scheme for Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(4), 1461-1488. (2000)
4. Kurganov A., Noelle S. and Petrova G. Semi-Discrete Central-Upwind Schemes for Hyperbolic Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 23, 707-740. (2001)
5. Kurganov A., Tadmor E. New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations. *Journal of Computational Physics*, **160**, 241-282. (2000)
6. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77, 439-471. (1988)
7. Strang G. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5, 506-517 (1968)