

УДК 621.326

**В.П. ВОЛОБОЕВ, В.П. КЛИМЕНКО****ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

**Abstract:** Correct statement of a task of modelling of linear electric circuits which are described by system of linear algebraic equations (SLAE) is offered. It is shown, that the correctness of statement depends on a choice of variables SLAE at a stage of working up the equations, instead of conditionality SLAE. It is offered to apply voltage of components of branches of the graph tree of a circuit as SLAE variables, which correct choice is carried out at working up topological matrix of graph contours and the component of a circuit depends on parameters. Correct statement of a task to modeling of complex objects is possible, if there is an electrotechnical analogy.

**Key words:** system, modeling, ill-posed task, ill-conditionality, system of the linear algebraic equations, electric circuits, nodal potential method, method of voltage of components of the graph tree branches of electric circuit.

**Анотація:** Запропоновано коректну постановку задачі моделювання лінійних електричних кіл, які описуються системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ). Показано, що коректність постановки залежить від вибору змінних СЛАУ на етапі складання рівнянь, а не від обумовленості СЛАУ. Запропоновано застосовувати напруги компонентів гілок дерева графа кола як змінних СЛАУ, коректний вибір яких виконується при складанні топологічної матриці контурів графа й залежить від параметрів компонентів кола. Коректна постановка задачі моделювання складних об'єктів можлива, якщо існує електротехнічна аналогія.

**Ключові слова:** система, моделювання, некоректна задача, погана обумовленість, система лінійних алгебраїчних рівнянь, електричне коло, метод вузлових потенціалів, метод напруг компонентів гілок дерева графа електричного кола.

**Аннотация:** Предложена корректная постановка задачи моделирования линейных электрических цепей, которые описываются системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Показано, что корректность постановки зависит от выбора переменных СЛАУ на этапе составления уравнений, а не от обусловленности СЛАУ. Предложено применять напряжения компонент ветвей дерева графа цепи в качестве переменных СЛАУ, корректный выбор которых выполняется при составлении топологической матрицы контуров графа и зависит от параметров компонент цепи. Корректная постановка задачи моделирования сложных объектов возможна, если существует электротехническая аналогия.

**Ключевые слова:** система, моделирование, некорректная задача, плохая обусловленность, система линейных алгебраических уравнений, электрические цепи, метод узловых потенциалов, метод напряжений компонент ветвей дерева графа электрической цепи.

**1. Введение**

В настоящее время для изучения поведения объектов, процессов и явлений (в общем случае систем), а также получения информации, необходимой для принятия решения, применяется математическое моделирование. Моделирование становится неотъемлемой частью интеллектуальной деятельности человечества и поэтому должно гарантировать достоверность получаемых результатов, так как грубые ошибки в результатах моделирования могут стать причиной аварий и даже катастроф.

Принято считать, что все задачи математики, физики и техники делятся на два класса. Задача называется корректной, если она разрешима при любых начальных (или граничных) данных, принадлежащих к некоторому классу, имеет единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных, т.е. малым погрешностям исходных данных соответствуют малые погрешности решений. Задача называется некорректной, если она разрешима не при любых начальных данных, либо если нельзя выбрать такие нормы для решения и такие нормы для начальных данных, чтобы в этих нормах имела место непрерывная зависимость

решения от условий задачи, т.е. малым погрешностям исходных данных соответствовали сколь угодно большие погрешности решений.

Существовало мнение, что некорректные задачи не могут встречаться при решении физических и технических задач и что для некорректных задач невозможно построение приближённого решения. Развитие электронной вычислительной техники и применение её для решения математических задач изменило точку зрения на возможность построения приближённых решений некорректно поставленных задач.

Известно много примеров классических математических задач, являющихся некорректными при совершенно естественном выборе понятий меры точности как для исходных данных задачи, так и для возможных решений: решение систем линейных уравнений, задача оптимального планирования; решение интегральных уравнений 1-го рода; большое число краевых задач для уравнений с частными производными и др.

Следует отметить, что в настоящее время разработка соответствующих методов решения некорректных задач рассматривается как чисто математическая задача. Методы решения некорректных задач были предложены в работах А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2], В.К. Иванова [3]. Более подробно с этими методами можно ознакомиться по монографиям М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шшатского [4], А.Н. Тихонова, В.Я. Арсенина [5].

## **2. Постановка задачи**

Известно классическое утверждение Адамара: «Аналитическая задача всегда корректно поставлена в смысле существования и единственности решения, непрерывной зависимости от данных задачи, когда есть механическое или физическое истолкование вопроса» [6]. Приведенное выше утверждение или постулат Адамара [7], по существу, подразумевает возможность «хорошей» (корректной) постановки любой физически содержательной задачи. Итак, Адамар и целый ряд других выдающихся ученых полагали, что любая физически интерпретируемая задача может быть корректно поставлена, но в современных изданиях преобладает совершенно противоположная точка зрения. В самом деле, большая часть практически важных задач, которые в них рассматриваются, – некорректны.

Цель настоящего исследования состоит в обосновании неправомочности такого мнения и, напротив, конструктивном воплощении утверждения Ж. Адамара о существовании корректных постановок задач, адекватно описывающих реальные процессы и явления.

Математическое моделирование системы состоит из составления математического описания системы и последующего решения уравнений, описывающих систему.

Можно выделить два подхода к решению физических и технических задач. В эпоху ручного счета пользователь при решении конкретной задачи из многообразия методов описания системы и решения уравнений, описывающих систему, выбирал те, которые наиболее эффективно обеспечивали решение конкретной задачи, т.е. при решении задачи использовались опыт, интеллект пользователя и его понимание решаемой задачи.

В эпоху компьютерных технологий вместо многообразия методов описания системы используется только один, а на этапе решения математического описания системы методы,

решающие проблемные системы уравнений. В данном случае достоверность результатов зависит только от применяемых методов решения и вычислительных средств и не зависит от научного интеллекта пользователя. Как следует из обзора научной литературы, этапы составления математического описания системы и решения составленных уравнений рассматриваются как независимые и несвязанные между собой.

Следует отметить, что в литературе практически нет примеров системного подхода к корректной постановке технической (физической) задачи, ориентированной на компьютерные технологии, как это было в эпоху ручного счета. Как исключение из общего правила, можно отметить статьи [8 – 12]. В них рассмотрен метод составления уравнений нелинейной электрической цепи, в котором применяются напряжения или токи компонент электрической цепи в качестве переменных СЛАУ, рекомендации по учету условий сходимости метода решения нелинейных систем уравнений при составлении уравнений, реализация в программе общего назначения алгоритмов, разработанных на базе предложенного метода, и языка описания микроэлектронных устройств. Метод описания нелинейных электрических цепей прошел апробацию на конкретных задачах и подтвердил эффективность системного подхода к решению задачи моделирования нелинейных электрических цепей.

Можно утверждать, что почти любая задача вычислительной математики сводится в конечном итоге к решению полученной некоторым образом системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Численное решение многих классов СЛАУ встречает значительные трудности, т.е. относится к классу некорректных задач. К числу таких задач относятся системы большой размерности с заполненными матрицами произвольной структуры, а также плохообусловленные СЛАУ.

В данной работе на модельном примере расчета линейной электрической цепи, которая описывается СЛАУ, будет показано, что корректная постановка задачи моделирования, а тем самым и достоверность результатов, зависит от типа используемого функционального пространства, т.е. от выбора переменных СЛАУ на этапе описания цепи, а не от обусловленности СЛАУ. С этой целью будет проведена оценка достоверности результатов расчета электрической цепи в зависимости от применяемого метода описания цепи. Будут рассмотрены метод узловых потенциалов (основной метод составления уравнений электрической цепи в эпоху компьютерных технологий), в котором в качестве переменных составленных уравнений применяются узловые потенциалы, отсчитываемые от базисного узла, и метод [8], в котором в качестве переменных используются напряжения компонент, входящих в ветви дерева графа цепи. Для решения СЛАУ будет применен метод Гаусса [13].

### **3. Модельный пример**

Известно, что обусловленность СЛАУ, описывающей электрическую цепь, зависит от диапазона разброса величин проводимостей (сопротивлений) компонент цепи. На рис. 1 приведен модельный пример электрической цепи. Диапазон изменения проводимостей компонент электрической цепи, равный 15 порядкам, обеспечивает плохую обусловленность СЛАУ и тем самым, как принято считать, некорректность задачи расчета. На примере расчета потенциала узла 2 (напряжение на

компоненте  $G_2$ ) будет анализироваться зависимость достоверности результатов расчета от применяемого метода описания электрической цепи.

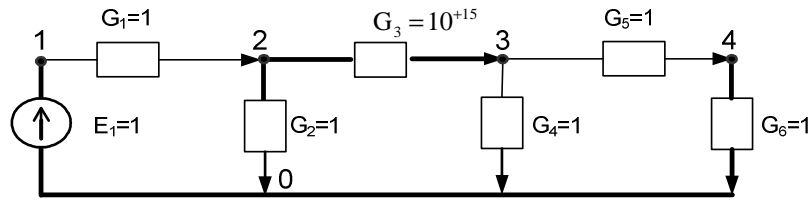


Рис. 1. Электрическая цепь

При расчете электрической цепи в эпоху ручного счета опыт пользователя подсказывал, что узлы 2 и 3 можно объединить, т.е. принять  $U_{G_3} = 0$ , так, как проводимость  $G_3$  на 15 порядков больше остальных проводимостей, присоединенных к этим узлам. Это делает задачу расчета корректной, существенно упрощает расчет электрической цепи и практически не влияет на достоверность результата расчета.

В системах схемотехнического моделирования для математического описания электрической цепи применяется метод узловых потенциалов. В качестве переменных составленных уравнений выступают узловые потенциалы, отсчитываемые от базового узла 0. Простой алгоритм формализованного составления уравнений цепи и слабозаполненная матрица линейных уравнений, описывающих цепь, являются существенным преимуществом перед другими методами описания. В связи с тем, что имеется обширный список литературы по различным аспектам применения метода узловых потенциалов [14], будет приведена только система уравнений, описывающая электрическую цепь на рис. 1.

$$\begin{vmatrix} G_5 + G_6 & -G_5 & 0 \\ -G_5 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_4 \\ U_3 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 E_1 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где  $U_2, U_3, U_4$  – узловые потенциалы, отсчитываемые от базового узла. Следует заметить, что в данном случае узловые потенциалы совпадают с напряжениями на компонентах  $U_{G_2}, U_{G_4}, U_{G_6}$ . Для определения узлового потенциала  $U_2$  достаточно выполнить прямой ход метода Гаусса решения системы линейных уравнений. После соответствующих преобразований система уравнений (1) примет вид

$$U_4 = \frac{G_5}{G_5 + G_6} U_3,$$

$$U_3 = \frac{G_3}{(G_3 + G_4 + G_5) - \frac{G_5^2}{(G_5 + G_6)}} U_2, \quad (2)$$

$$U_2 = \frac{G E_{11}}{\frac{G^2}{(G_3 + G_4 + G_5) - \frac{G_5^2}{(G_5 + G_6)}} + (G_1 + G_2 + G_3)}.$$

Анализ системы уравнений (2) показывает, что достоверность результата зависит от конечной точности представления чисел, с которой выполняется вычислительный процесс составления и решения уравнений. Так, если вычислительный процесс решения системы (2) выполняется с точностью представления чисел меньше 15 значащих цифр, то получаем результат

$$U_2 \approx \frac{1}{-10^{15} + 10^{15}},$$

а при выполнении вычислений с точностью больше, чем 15 значащих цифр, получаем

$$U_2 = \frac{\left(10^{15} + \frac{3}{2}\right)}{-10^{30} + 2 * 10^{15} + 10^{30} + \frac{6}{2} + \frac{3}{2} 10^{15}} \approx \frac{2}{7}.$$

Из рассмотренного примера следует, что при составлении и решении СЛАУ плохая обусловленность СЛАУ (1), (собственные числа матрицы есть  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10^{15} + j10^{15}, \lambda_3 = 10^{15} - j10^{15}$ ) трансформируется в требования к конечной точности представления чисел. Кстати, в литературе по данному вопросу можно найти подтверждение данного вывода. Разработка методов решения плохообусловленных СЛАУ стала актуальной именно в эпоху компьютерных технологий, так как последним присущ такой недостаток, как конечная точность представления чисел.

Хорошо известно, что плохая обусловленность затрудняет получение достаточно точного решения и замедляет сходимость итерационных процессов. По этой причине предобуславливание СЛАУ является существенным требованием для эффективного применения итерационных методов. Идея предобуславливателей основана на стремлении обусловить СЛАУ за счет перехода к новым переменным. Для этой цели стараются выбрать матрицу-предобуславливатель таким образом, чтобы ее норма была близкой к норме исходной матрицы. Близость матрицы-предобуславливателя к исходной матрице позволяет повысить число обусловленности вновь полученной СЛАУ. Методы и приемы выбора предобуславливателей могут быть разные [15 – 17]. Несмотря на то, что данное направление бурно развивается, нахождение хорошего предобуславливателя – трудная задача, и часто предобуславливатели подбираются методом перебора. Это, в первую очередь, связано с тем, что не всегда известны спектральные свойства

исходной матрицы, изучение таких свойств является не менее сложной задачей. При выборе преобуславливателя не учитываются особенности конкретной задачи.

Естественно, возникает вопрос, насколько сделанный выше вывод о связи между плохой обусловленностью СЛАУ и достоверностью результатов моделирования является общим. В связи с этим, так же как при разработке преобуславливателя, был применен переход к новым переменным на этапе решения СЛАУ, представляется целесообразным рассмотреть возможность оптимального выбора переменных СЛАУ на этапе составления уравнений с целью получения достаточно точного решения и ускорения сходимости итерационных процессов. К сожалению, метод узловых потенциалов не предоставляет возможности выбора переменных СЛАУ.

Как уже упоминалось, в статье [8] предложен метод составления уравнений, в котором в качестве переменных составленных уравнений применяются напряжения компонент электрической цепи. Рекомендации по учету сходимости метода решения системы нелинейных уравнений при составлении уравнений реализуются на этапе выбора независимых переменных СЛАУ при описании электрической цепи.

Представляет интерес рассмотреть возможность применения этих рекомендаций для корректной постановки задачи моделирования линейных электрических цепей.

#### **4. Предлагаемый подход к описанию электрической цепи**

В данной работе будут приведены только основные положения метода, необходимые для решения модельного примера. Метод рассмотрен в статье [8]. Расширение области применимости метода приведено в статье [10]. В статье [11] предложены рекомендации по учету сходимости метода решения нелинейных уравнений при составлении уравнений.

Построение математической модели электрической цепи данным методом базируется на основной системе уравнений электрической цепи, куда входят уравнения, составленные на основе законов Кирхгофа, и компонентные уравнения. Для описания графа электрической цепи и, соответственно, уравнений на основе законов Кирхгофа применяются топологические матрицы контуров и сечений. Переменные составляемой системы уравнений выбираются из напряжений и/или токов компонент в результате анализа основной системы уравнений. При этом учитываются параметры компонентных уравнений и особенности топологических матриц, присущие конкретной цепи или классу цепей. В конечном счете, из основной системы уравнений выделяются система уравнений, соответствующая выбранным переменным, и система уравнений связи, с помощью которых вычисляются все напряжения и токи компонент. Преобразованная таким образом основная система уравнений рассматривается как математическая модель электрической цепи. Рассмотрим этапы составления этой модели.

Вначале составляется эквивалентная схема замещения электрической цепи, определяются компонентные уравнения и граф цепи. Для модельного примера компонентные уравнения имеют вид

$$I = GU . \quad (3)$$

Граф цепи совпадает с электрической цепью. Составление топологических матриц контуров и сечений включает выбор дерева графа цепи и составление контуров для выбранного дерева.

Дерево графа электрической цепи выбирается таким образом, чтобы все источники напряжения включались в дерево, а все источники тока в хорды. Напряжения и токи компонентов цепи в векторах группируются в элементы, содержащие компоненты, которые входят в дерево (индекс д), т.е. ветви, и содержащие компоненты, не входящие в дерево (индекс х) – хорды, таким образом

$$U = \begin{bmatrix} U_d \\ U_x \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I_d \\ I_x \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $U$  – вектор напряжений компонент,  $I$  – вектор токов компонент.

Контурные образуются присоединением хорд к дереву графа схемы. В этом случае топологическая матрица контуров имеет вид  $\begin{bmatrix} 1 & F^t \end{bmatrix}$ , где  $1$  – единичная подматрица хорд,  $t$  – обозначает транспонирование матрицы, а топологическая матрица сечений вид  $\begin{bmatrix} 1 & -F \end{bmatrix}$ , где  $1$  – единичная подматрица ветвей. Уравнения схемы, составленные на основе законов Кирхгофа, в матричном виде можно записать следующим образом:

$$U_x = -F^t U_d, \quad (5)$$

$$I_d = F I_x. \quad (6)$$

Возможны и другие способы построения контуров, но только рассмотренный метод имеет единичные подматрицы в топологических матрицах. В [8] рассмотрены разные варианты выбора типа независимых переменных СЛАУ. В нашем случае ограничимся выбором напряжения ветвей дерева в качестве переменных. Тогда из компонентных уравнений (3) и уравнений (5), (6) будет выделена следующая система уравнений, описывающая электрическую цепь:

$$G_d U_d - F(G_x(-F^t U_d)) = 0. \quad (7)$$

Как следует из [11], в случае выбора напряжений ветвей дерева в качестве переменных, сходимость метода решения при составлении уравнений цепи учитывается следующим образом: в дерево необходимо включить компоненты, имеющие максимальную проводимость, т.е. в контуре, образованном присоединением хорды к дереву, компоненты дерева должны иметь проводимости по величине больше, чем проводимость хорды. Эта задача имеет решение только для предложенного варианта составления топологической матрицы контуров. Учитывая сказанное, в случае модельного примера в дерево графа цепи были выбраны компоненты  $E_1, G_2, G_3, G_6$ . Тогда векторы напряжений и токов компонент имеют вид

$$U_d = \begin{bmatrix} E_1 \\ U_{G_2} \\ U_{G_3} \\ U_{G_6} \end{bmatrix}, \quad U_x = \begin{bmatrix} U_{G_1} \\ U_{G_4} \\ U_{G_5} \end{bmatrix}, \quad I_d = \begin{bmatrix} I_{E_1} \\ I_{G_2} \\ I_{G_3} \\ I_{G_6} \end{bmatrix}, \quad I_x = \begin{bmatrix} I_{G_1} \\ I_{G_4} \\ I_{G_5} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

а топологические матрицы  $F^t$  и  $F$

$$F^t = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Учитывая (8) и (9), после соответствующих преобразований система уравнений (7) примет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} G_5 + G_6 & G_5 & -G_5 \\ G_5 & G_3 + G_4 + G_5 & -(G_4 + G_5) \\ -G_5 & -(G_4 + G_5) & G_1 + G_2 + G_4 + G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 E_1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Как и в случае метода узловых потенциалов, для вычисления компонентного напряжения  $U_{G_2}$  применим прямой ход метода Гаусса решения СЛАУ. После соответствующих преобразований система уравнений (10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{G_6} &= -\frac{G_5}{G_5 + G_6} U_{G_3} + \frac{G_5}{G_5 + G_6} U_{G_2}, \\ U_{G_3} &= \frac{G_4 + G_5 - \frac{G_5^2}{G_5 + G_6}}{G_3 + G_4 + G_5 - \frac{G_5^2}{G_5 + G_6}} U_{G_2}, \\ U_{G_2} &= \frac{G_1 E_1}{(G_1 + G_2 + G_4 + G_5) - \frac{G_5^2}{(G_5 + G_6)} + \frac{((G_4 + G_5) + \frac{G_5^2}{(G_5 + G_6)})^2}{G_3 + G_4 + G_5 - \frac{G_5^2}{G_5 + G_6}}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из анализа вычислительного процесса решения уравнений (11) следует, что составленная данным методом СЛАУ удовлетворяет требованиям корректной задачи. Несмотря на большой диапазон изменения величины проводимостей (15 порядков), нет жестких требований к конечной точности представления чисел как при составлении уравнений, так и при решении составленных уравнений. Для получения достоверного результата достаточно выполнить вычислительный процесс составления и решения СЛАУ с точностью представления чисел в две значащие цифры. Это существенным образом отличается от точности представления чисел более чем в 15 значащих цифр при применении метода узловых потенциалов.

Следует заметить, что в СЛАУ (10)  $|G_3 + G_4 + G_5|$  – модуль диагонального члена второй строки (столбца) матрицы значительно больше (на 15 порядков)  $|G_4 + 2G_5|$  – модуля суммы



остальных членов строки (столбца). Это означает, что можно считать, что  $U_{G_3} = 0$ , и СЛАУ (10) можно упростить и при этом сохранить достоверность результатов. При расчете в эпоху ручного счета этому соответствовало объединение узла 2 с узлом 3 в электрической цепи.

Если выбрать в дерево ветви  $E_1$ ,  $G_6$ ,  $G_4$ ,  $G_2$ , то в результате составления уравнений получим систему уравнений (1). Это означает, что если узловые потенциалы соответствуют напряжениям компонентов, то метод узловых потенциалов можно рассматривать как частный случай предложенного метода.

СЛАУ (10) есть плохообусловленная, собственные числа матрицы  $\lambda_1 = 1,5857864376253$ ,  $\lambda_2 = 5,0E + 14 + j5,0E + 14$ ,  $\lambda_3 = 5,0E + 14 - j5,0E + 14$ . Это означает, что корректная постановка задачи моделирования электрических цепей фактически зависит не от обусловленности СЛАУ, а от выбора независимых переменных на этапе составления уравнений.

Корректная постановка задачи достигнута за счет применения целенаправленного выбора напряжений компонент цепи в качестве независимых переменных системы уравнений, описывающих электрическую цепь. Целенаправленный выбор независимых переменных выполняется при составлении по определенному алгоритму топологической матрицы контуров графа цепи на этапе описания цепи. Для оптимального выбора независимых переменных СЛАУ достаточно знать параметры компонент и топологические матрицы контуров и сечений электрической цепи. Ниже будет рассмотрено обсуждение результатов с точки зрения их общности.

На примере моделирования электрических цепей продемонстрирован новый подход к корректной постановке задачи моделирования систем. Эффективность предложенного метода составления электрической цепи, с точки зрения корректной постановки задачи моделирования и достоверности результатов моделирования, достигнута за счет:

- выбора в качестве переменных СЛАУ, описывающих электрическую цепь, напряжений компонентов ветвей дерева графа цепи, а не узловых потенциалов;
- применения топологических матриц контуров и сечений графа цепи для составления уравнений электрической цепи;
- применения параметров компонент электрической цепи для оптимального выбора независимых переменных СЛАУ.

В связи с этим следует отметить, что получение корректной СЛАУ на этапе составления уравнений имеет существенные преимущества перед разработкой или подбором соответствующего предобуславливателя. Показано, что корректная постановка задачи моделирования линейных электрических цепей зависит не от плохой обусловленности СЛАУ, описывающих электрическую цепь, а от выбора переменных СЛАУ на этапе описания электрической цепи. Параметры конкретной электрической цепи определяют выбор переменных СЛАУ при составлении уравнений, а при построении предобуславливателя используются общие рекомендации по обуславливанию СЛАУ. Оптимальный выбор переменных не обуславливает СЛАУ, как в случае предобуславливателя, а только снимает жесткое требование к конечной точности представления чисел, с которой выполняется составление и решение СЛАУ. Ускорение

сходимости итерационных процессов за счет выбора переменных СЛАУ проанализировано в [9]. Алгоритм оптимального выбора переменных СЛАУ при составлении топологической матрицы контуров для заданного графа электрической цепи легко формализуется, так как для его реализации необходимо знать только параметры компонент конкретной электрической цепи. Нет потерь информации при вычислении элементов СЛАУ, как это может быть при применении предобуславливателя.

При моделировании электрической цепи во временной или частотной области параметры компонент меняются. Это может привести к тому, что в процессе моделирования задача может стать некорректной. Проблема некорректной постановки задачи в процессе моделирования решается за счет включения метода составления уравнений электрической цепи в процесс моделирования. Предложенный метод легко интегрируется в процесс моделирования электрических цепей. Для корректного составления СЛАУ достаточно знать топологические матрицы контуров и сечений графа электрической цепи и параметры компонент. Корректировка задачи моделирования выполняется только в том случае, когда проводимости компонент хорд больше проводимостей компонент ветвей дерева.

Следует отметить, что данный метод описания электрической цепи применим к более широкому классу задач, чем метод узловых потенциалов. Так, в связи с тем, что составление уравнений цепи является частью процесса моделирования, появляется возможность моделировать цепи с динамически переменной структурой.

В вычислительной математике методы решения систем уравнений обычно рассматриваются без привязки к объектам, для которых эти системы уравнений составлены. В данной работе показано, что соответствующим выбором переменных на этапе составления уравнений можно предотвратить появление проблемных уравнений и обеспечить достоверный результат моделирования. Это означает, что имеется возможность из общей задачи решения проблемных уравнений решить ту часть, источником которой есть некорректный выбор переменных СЛАУ.

Следует заметить, что уравнения математической физики [7] представляют собой системы уравнений, в которых переменные отсчитываются от базовой точки. Более того, если провести анализ методов описания объектов в физике, то окажется, что практически все они используют переменные, отсчитываемые от базовой точки. Это означает, что дискретным аналогам уравнений, описывающих объекты математической физики, могут быть присущи те же проблемы, что и системам уравнений, составленным методом узловых потенциалов.

Два варианта применения рассмотренного подхода возможны к моделированию не электротехнических объектов. Полученные результаты непосредственно можно применить только к объектам, которые можно представить в виде эквивалентных схем замещения электрическими цепями, используя электротехническую аналогию. В эпоху ручного счета большое внимание уделялось разработке эквивалентных схем замещения объектов. Это давало возможность, используя электротехническую аналогию, описать объект и понять физику протекающих объектов [18]. Кстати, модельный пример можно рассматривать как грубую электротехническую модель одномерного уравнения теплопроводности, описывающего слоистую среду. В этом случае для

моделирования применяется программа схемотехнического моделирования на базе рассмотренного метода.

В случае корректной постановки задачи для конкретного объекта необходимо на этапе составления уравнений объекта выбирать переменные системы уравнений, описывающих объект, в соответствии с рассмотренными рекомендациями.

## **5. Заключение**

В связи с тем, что применение моделирования становится неотъемлемой частью интеллектуальной деятельности человечества, достоверность результатов моделирования стает основным критерием оценки результатов моделирования. Это требует новых подходов к разработке методов и алгоритмов описания сложных объектов и решения составленных описаний.

В данной работе на примере расчета линейной электрической цепи показано, что источником некорректной постановки задачи расчета есть конечная точность представления чисел. Оказывается, что не плохая обусловленность СЛАУ затрудняет получение достаточно точного решения и замедляет сходимость итерационных процессов, а некорректный выбор переменных СЛАУ. Предложен метод описания электрических цепей, который позволяет корректно поставить задачу моделирования на этапе выбора переменных СЛАУ при составлении уравнений. Корректная постановка задачи достигнута за счет выбора напряжения компонент ветвей дерева в качестве переменных СЛАУ при составлении уравнений. Для составления уравнений применяются топологические матрицы контуров и сечений графа электрической цепи. Корректный выбор переменных СЛАУ выполняется при составлении топологической матрицы контуров. В качестве критерия выбора переменных используются параметры компонент электрической цепи.

Предлагается рассматривать этапы составления и решения СЛАУ как зависимые и взаимосвязанные в связи с тем, что в процессе моделирования изменение параметров компонент может привести к некорректной задаче. Метод составления уравнений СЛАУ легко интегрируется в процесс моделирования, так как для корректировки задачи необходимо знать топологическую матрицу контуров и параметры компонент конкретной электрической цепи. Предложенный метод описания электрических цепей применим к более широкому классу электронных цепей, чем метод узловых потенциалов. Так появляется возможность моделировать электрические цепи с динамически изменяемой структурой.

Показано, что данный подход применим к сложным объектам, для описания которых можно применить электротехническую аналогию, или можно целенаправленно выбрать независимые переменные в соответствии с предложенными рекомендациями.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Тихонов Д.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады АН СССР. – 1963. – № 151. – С. 501 – 504.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
3. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Математический сборник. – 1963. – № 61 (103):2. – С. 211 – 223.
4. Лаврентьев М.М. и др. Некорректные задачи математического анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.

6. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
7. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 391 с.
8. Волобоев В.П. Составление уравнений цепи, содержащей зависимые двухполюсники и многополюсники // Вопросы проектирования математических машин и устройств. Научный совет по кибернетике АН УССР. – Киев, 1972. – С. 3 – 16.
9. Волобоев В.П. К учету сходимости численных методов при составлении уравнений цепи постоянного тока // Вопросы проектирования математических машин и устройств. Научный совет по кибернетике АН УССР. – Киев, 1972. – С. 17 – 26.
10. Волобоев В.П. О расширении класса схем, моделируемых методом напряжений ветвей дерева // Проектирование технических средств ЭВМ и систем: Сб. научных трудов. – Киев: Изд-во ИК АН УССР, 1982. – С. 32 – 36.
11. Волобоев В.П. Входной язык для моделирования микроэлектронных устройств программой общего назначения // Моделирование и разработка интегральных структур микроэлектронных устройств: Сб. научных трудов. – Киев: Изд-во ИК АН УССР, 1986. – С. 4 – 7.
12. Волобоев В.П. Программа моделирования аналоговых и цифровых интегральных схем // Проектирование элементов и узлов ЭВМ: Сб. научных трудов. – Киев: Изд-во ИК АН УССР, 1988. – С. 4 – 6.
13. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
14. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. – Киев: Техника, 1970. – 396 с.
15. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – М.: Наука, 1995.–288 с.
16. Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. О преобуславливании стабилизированных конечно-элементных схем высокого порядка. /[http://www.keldysh.ru/papers/2001/source/prep2001\\_92.txt](http://www.keldysh.ru/papers/2001/source/prep2001_92.txt)
17. Енсен С. Эффективное преобуславливание методом декомпозиции области для  $\rho\rho$ -версии с иерархическим базисом // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 5. – С. 37 – 56.
18. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. – М.: Наука, 1972. – 542 с.

*Стаття надійшла до редакції 04.11.2008*