

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СМ-ДЭС

Abstract. Technology and software are offered for simulation modeling of the broad class of the random processes. There are two well-known problems of probability theory and reliability theory associated with analysis of random processes. The article contains examples of solving these problems by simulation in the package SM-DES. Possibility of solving a wide range of other applications is also presented.

Key words: simulation modeling, statistical modeling, random processes, information technologies, parametric failure.

Анотація. Пропонуються технологія і програмне забезпечення імітаційного моделювання широкого класу випадкових процесів. Наведені приклади вирішення двох відомих задач теорії ймовірностей і теорії надійності, пов'язаних з аналізом випадкових процесів, методом імітаційного моделювання в пакеті СМ-ДЕС. Показано можливість вирішення широкого спектру інших прикладних задач.

Ключові слова: імітаційне моделювання, статистичне моделювання, випадкові процеси, інформаційні технології, параметрична відмова.

Аннотация. Предлагаются технология и программное обеспечение имитационного моделирования широкого класса случайных процессов. Представлены примеры решения двух известных задач теории вероятностей и теории надежности, связанных с анализом случайных процессов, методом имитационного моделирования в пакете СМ-ДЭС. Показана возможность решения широкого спектра других прикладных задач.

Ключевые слова: имитационное моделирование, статистическое моделирование, случайные процессы, информационные технологии, параметрический отказ.

1. Введение

Поведение множества технических и организационных систем может быть описано случайными процессами (СП). Исследование подобных систем зачастую сводится к подробному анализу соответствующих СП, например, процесса параметрического (износного) отказа силовой механической системы.

В настоящее время известно большое количество аналитических моделей СП, каждая из которых рассматривает, однако, узкий класс соответствующих систем. Эффективным способом анализа произвольных систем и соответствующих им СП является имитационное моделирование. Проблемы последующего статистического анализа СП, требующего получения большого количества реализаций, успешно решаются с использованием современной компьютерной техники. Наибольшее преимущество имитационное моделирование имеет в случае анализа систем, функционирование которых описывается многомерными СП с зависимыми компонентами, когда аналитические методы громоздки и трудоемки.

Основными проблемами имитационного моделирования являются:

- реализация алгоритмов, позволяющих адекватно генерировать СП;
- реализации алгоритмов постановки и проведения имитационных экспериментов, а также сбора и анализа статистики по множеству полученных реализаций (траекторий) СП;
- автоматизация имитационного моделирования для решения практических задач.

В настоящее время существует программное обеспечение, предназначенное для имитационного моделирования СП. Иногда создатели новых классов СП сами реализуют программное обеспечение для генерации СП [1, 2]. Однако вышеуказанное обеспечение, как правило, не является общедоступным и не предназначено для универсального практического использования.

В данной связи актуально рассмотрение известных классов СП, допускающих «алгоритмическое» описание и применимых для имитационного моделирования задач теории игр, параметри-

ческих отказов технических систем и решения других практических задач, а также разработка средств автоматизации имитационного моделирования. Особый интерес представляют СП с непрерывным временем и фазовым пространством, применимые для моделирования параметрических отказов механических систем, задач гидравлики и др.

Для имитационного моделирования СП при анализе технических систем предлагается оригинальный программный комплекс СМ-ДЭС, реализующий агрегатный способ формализации [3]. Каждый агрегат имитационной модели предназначен для генерирования того или иного класса СП, их функционального преобразования и сбора статистики о реализациях СП.

2. Описание алгоритмов моделирования некоторых классов СП

Пусть α , β – одномерные случайные величины с произвольными законами распределения, тогда СП, определяемый выражением

$$\xi(t) = \alpha + \beta t, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1)$$

называется веерным случайным процессом.

Для моделирования веерного СП в СМ-ДЭС реализован специальный класс агрегатов, графическое изображение которых представлено на рис. 1 а, задание параметров (1) осуществляется в панели на рис. 2 а. Примеры нескольких реализаций веерного СП с параметрами $\alpha = 0$ и $\beta \sim N(0,5;0,5)$ представлены на рис. 3 а.

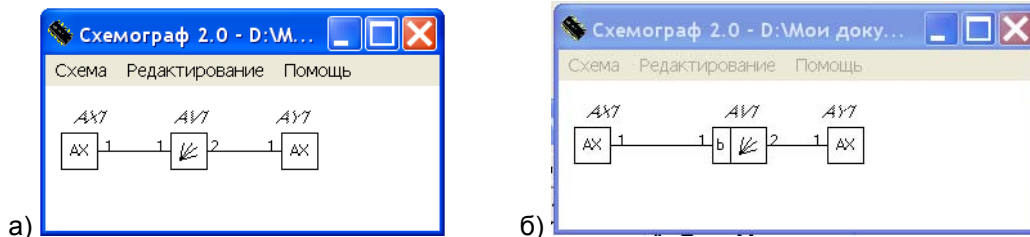


Рис. 1. Графическое изображение имитационной модели веерного СП в пакете СМ-ДЭС: обычного (а); с внешним управлением параметром β (б)

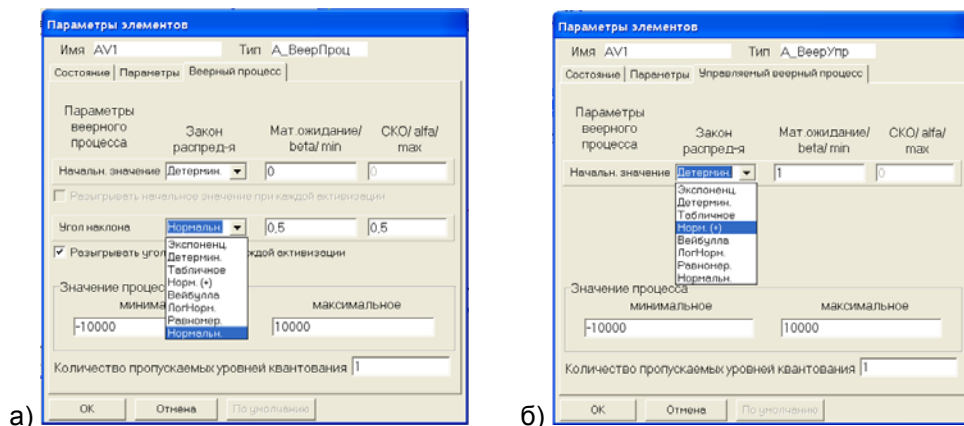


Рис. 2. Задание параметров веерного СП в пакете СМ-ДЭС: обычного (а); с внешним управлением параметром β (б)

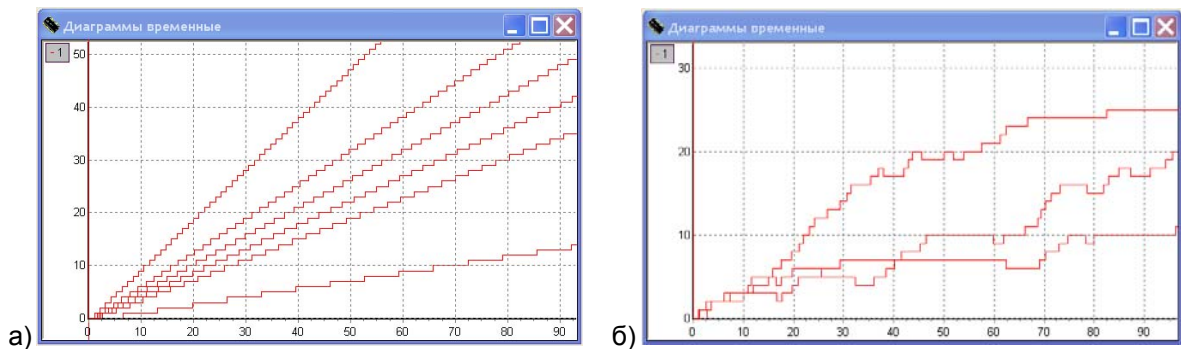


Рис. 3. Семейство реализаций веерного СП в СМ-ДЭС: обычного (а); модифицированного (б)

При моделировании веерного СП значения случайных величин α и β разыгрываются один раз при $t = 0$. Однако возможна модификация, когда значение β разыгрывается всякий раз, когда значение процесса $\xi(t)$ изменяется на фиксированную величину $\Delta\xi$ (на один квант):

$$\xi(t) = \alpha + i \Delta\xi = \alpha + \beta_1 t_1 + \beta_2 (t_2 - t_1) + \dots + \beta_i (t_i - t_{i-1}), \quad (2)$$

где β_i – i -я реализация случайной величины β , t_i – модельное время разыгрывания β_i , предшествующее моменту времени $t (t_i \leq t)$, определяемое рекуррентным уравнением

$$t_i = t_{i-1} + \frac{\Delta\xi}{\beta_i}. \quad (3)$$

Примеры нескольких реализаций модифицированного веерного СП с параметрами $\alpha = 0$ и $\beta \sim N(0,5;0,5)$ представлены на рис. 3 б.

В качестве законов распределения величин α и β целесообразно использовать равномерное, нормальное, логнормальное и распределение Вейбулла, которые охватывают широкий класс типовых распределений, а также таблично заданное распределение. Для моделирования веерного СП, значение параметра β которого зависит от состояния других объектов (агрегатов), в СМ-ДЭС реализован агрегат «Управляемый веерный процесс». Его графическое изображение представлено на рис. 1 б, а задание параметров осуществляется в панели на рис. 2 б.

Случайный процесс $\xi(t)$ с дискретным временем называется процессом с независимыми приращениями, если для любого натурального i и любых моментов времени $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, ..., $\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})$, являющиеся приращениями процесса $\xi(t)$, независимы в совокупности [4]. В пакете СМ-ДЭС реализован специальный класс агрегатов, моделирующих СП с независимыми, одинаково распределенными, приращениями $\Delta\xi = \xi(t_i) - \xi(t_{i-1})$ и одинаково распределенными интервалами времени $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ между сменами состояний СП. Начальное состояние $\xi(t_0)$ процесса также может подчиняться некоторому заданному распределению (рис. 4).

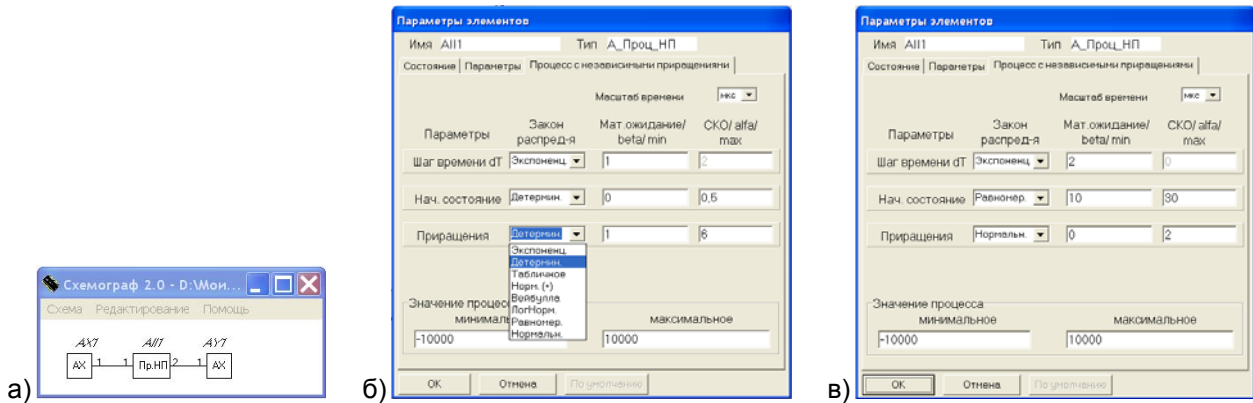


Рис. 4. Графическое изображение (а) и окна параметров СП с независимыми приращениями в пакете СМ-ДЭС: пуассоновского (б); обобщенного пуассоновского (в)

Данный агрегат моделирует достаточно широкий класс известных СП. Например, при начальном состоянии $\xi(0) = 0$, интервалах времени Δt между сменами состояний, подчиняющихся экспоненциальному распределению с параметром λ , и приращениях $\Delta\xi = 1$, данный СП является пуассоновским процессом (рис. 5 а). Если при этом приращения подчиняются распределению Коши с параметром $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, то имеем дело с процессом Коши [4, с. 287]; а если произвольному распределению, то – с обобщенным пуассоновским процессом (рис. 4 в и рис. 5 б) [4, с. 312].

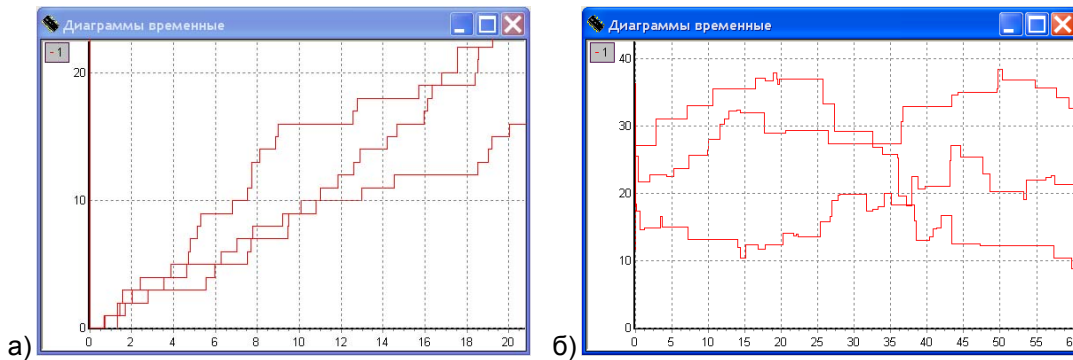


Рис. 5. Семейства реализаций СП в СМ-ДЭС: пуассоновского (а); обобщенного пуассоновского (б)

В особый класс СП с независимыми приращениями выделяют процесс случайного блуждания – СП с дискретным временем и дискретным фазовым пространством, который при изменении времени на один шаг Δt с вероятностью p^+ увеличивает свое состояние на один квант Δx , с вероятностью p^- – уменьшает свое состояние на один квант Δx и с вероятностью $1 - p^+ - p^-$ сохраняет прежнее состояние [3].

В общем случае, интервалы времени Δt между возможными сменами состояний процесса случайного блуждания могут быть случайными величинами. Например, если интервалы времени Δt между возможными сменами состояний подчиняются экспоненциальному распределению с параметром $(\lambda + \mu)$, а вероятности переходов определяются выражениями

$$p^+ = \lambda / (\lambda + \mu), \quad p^- = 1 - p^+, \quad (5)$$

то имеем дело с процессом «гибели и размножения», где λ – интенсивность рождения очередной особи, а μ – интенсивность смерти (рис. 6).

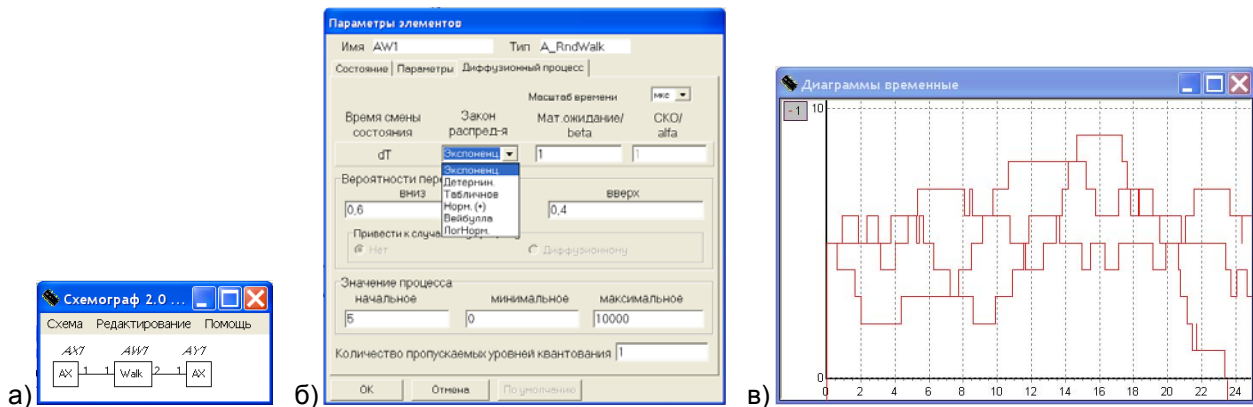


Рис. 6. Графическое изображение (а), окно параметров (б) и семейство реализаций в СМ-ДЭС (в) процесса случайного блуждания, соответствующего процессу «гибели и размножения»

Выполняя предельный переход в процессе случайного блуждания при $\Delta t \rightarrow 0$ с одновременным выполнением условий

$$\Delta x = b\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}), \quad p^+ = \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}) \quad \text{и} \quad p^- = \frac{1}{2} - \frac{a}{2b}\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}), \quad (6)$$

получают диффузионный СП с коэффициентом переноса $a \in R$ и коэффициентом диффузии $b > 0$ [3]. При $a = 0$ и $b = 0$ имеем дело с винеровским СП (рис. 7).

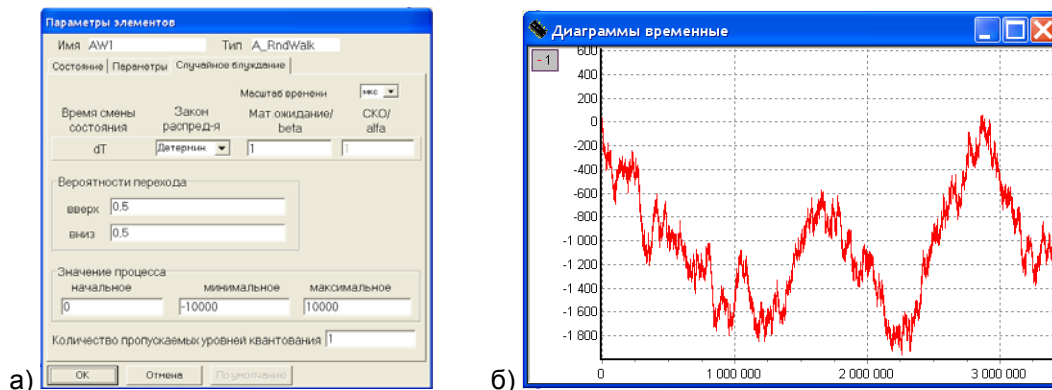


Рис. 7. Окно параметров (а) и пример реализации (б) винеровского СП в пакете СМ-ДЭС

Смешанным процессом авторегрессии и скользящего среднего (AutoRegressive Moving Average, ARMA) называется СП $\xi(t)$ с дискретным временем $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и непрерывным фазовым пространством, значения которого удовлетворяют разностному уравнению [3, 5, 6].

$$\xi(t) = a_1 \xi(t-1) + \dots + a_p \xi(t-p) + b_1 \eta(t-1) + \dots + b_q \eta(t-q) + \eta(t), \quad (7)$$

где $\eta(t)$ – дискретный белый шум – последовательность, состоящая из независимых в совокупности и одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием, p – порядок авторегрессии, a_1, \dots, a_p – коэффициенты авторегрессии, q – порядок скользящего среднего, b_1, \dots, b_q – коэффициенты скользящего среднего.

Если в ARMA $p = 0$ и $q \in N$, то имеем дело с процессом скользящего среднего (MA) порядка q :

$$\xi(t) = b_1 \eta(t-1) + \dots + b_q \eta(t-q) + \eta(t) + \mu, \quad (8)$$

где μ – математическое ожидание процесса MA [3], а если в ARMA $q = 0$ и $p \in \mathbb{N}$, то имеем дело с процессом авторегрессии (AR) порядка p :

$$\xi(t) = a_1 \xi(t-1) + \dots + a_p \xi(t-p) + \eta(t). \quad (9)$$

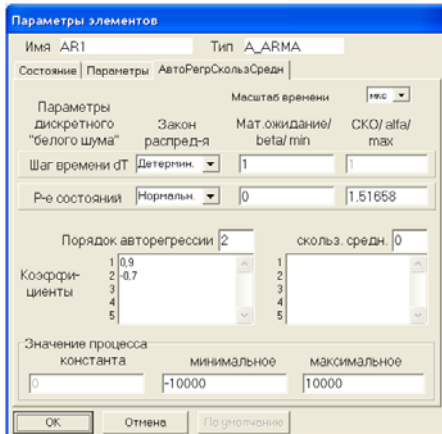


Рис. 8. Окно параметров процесса ARMA в пакете СМ-ДЭС

Адекватное описание наблюдаемых на практике явлений, моделируемых стационарными СП, зачастую достигается моделями ARMA, порядок которых не превышает 2 [6]. Однако в пакете СМ-ДЭС реализована возможность моделирования процессов ARMA порядка 5 и выше (рис. 8).

Выбирая специальным образом значения параметров ARMA p , $\{a_i\}$, q , $\{b_j\}$ в (7), можно моделировать стационарный гауссовский СП – процесс $\xi(t)$ с дискретным временем и непрерывным фазовым пространством, определяемый автокорреляционной функцией $R(t, t + \Delta t)$, все сечения которого подчиняются нормальному закону

распределения [3]. При этом в (7) $\eta(t)$ – гауссовский белый шум – последовательность, состоящая из независимых, в совокупности нормально распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

При моделировании нестационарных гауссовских СП обычно используют соотношение

$$\zeta(t) = \xi(t) + f(t), \quad (10)$$

где $\xi(t)$ – гауссовский стационарный СП с нулевым математическим ожиданием и постоянной конечной дисперсией, $f(t)$ – неслучайная функция времени, называемая трендом, например [3]:

$$f_1(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i t^i, \quad f_2(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos(\beta_i t + \gamma_i), \quad f_3(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \exp(\beta_i t + \gamma_i). \quad (11)$$

Имитационная модель нестационарного гауссовского СП с трендом $f_2(t)$ (11) в пакете СМ-ДЭС представлена на рис. 9. На рис. 10 представлен пример реализации данного СП.

При моделировании трендов с функцией $f(t)$ его значения воспроизводятся с заданной точностью Δx . При этом время t_2 очередного изменения значения функции $f(t)$ определяется в данный момент модельного времени t_1 решением уравнения (12):

$$t_2 = \begin{cases} f^{-1}(f(t_1) + \Delta x), & \text{если } f(t) \text{ возрастает в точке } t_1 \text{ (т.е. } f'(t_1) > 0), \\ f^{-1}(f(t_1) - \Delta x), & \text{если } f(t) \text{ убывает в точке } t_1 \text{ (т.е. } f'(t_1) < 0), \\ t_1 + \Delta t, & \text{если функция } f'(t) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где Δt – задаваемая пользователем величина интервала времени, бесконечно малая относительно значения Δx . Если аналитическое решение уравнения (12) затруднено, то можно воспользоваться численным решением, полученным линеаризацией функции тренда $f(t)$ в точке t_1 .

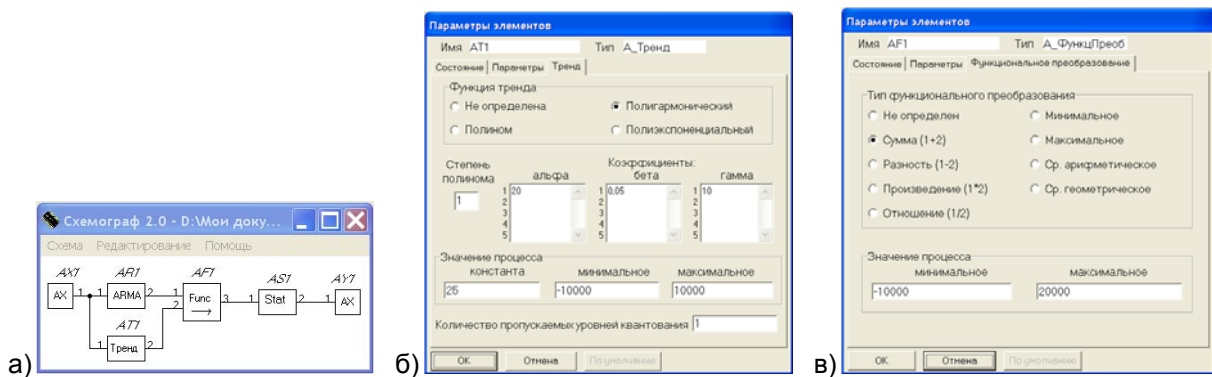


Рис. 9. Моделирование нестационарного гауссовского СП: модель в пакете СМ-ДЭС (а), параметры агрегата, моделирующего тренд (б), параметры агрегата необходимого функционального преобразования (в)



Рис. 10. Реализации в пакете СМ-ДЭС стационарного гауссовского СП, тренда и нестационарного гауссовского СП

В современной литературе [2, 3, 5, 7] приводятся алгоритмы моделирования других СП, например, ARCH, BL, Gamma, GARCH, FAR, EXPAR, SVM, TAR, TES. Однако особый интерес для имитационного моделирования технических систем представляет стационарный процесс авторегрессии с произвольным распределением состояний (AutoRegressive To Anything, ARTA) [1, 2]. Процесс ARTA точно соответствует заданной структуре автокорреляции (аналогично процессу AR), а также стационарному распределению состояний (отличающемуся, при необходимости, от нормального распределения):

$$\zeta(t) = F^{-1}(0,5 + \Phi(\xi(t))), \quad (13)$$

где $F^{-1}(\bullet)$ – функция, обратная функции заданного стационарного распределения состояний процесса ARTA, $\Phi(\bullet)$ – функция Лапласа, $\xi(t)$ – стационарный гауссовский СП с единичной дисперсией и заданной автокорреляционной функцией $R(t, t + \Delta t)$.

Стационарный гауссовский СП $\xi(t)$ моделируется выражением (9), где порядок p и коэффициенты авторегрессии a_1, a_2, \dots, a_p определяют авторегрессионную структуру процесса ARTA, а дисперсия используемого в (9) гауссовского белого шума $\eta(t)$ определяется уравнениями Юла-Уокера [5]. Для определения функции Лапласа используются две аппроксимации непрерывными дробями отношения Миллса [7, с. 256]. В соответствии с методом обратной функции, преобразование $F^{-1}(\bullet)$ величины $(0,5 + \Phi(\xi(t)))$, подчиняющейся равномерному распределению на интервале $(0, 1)$, завершается получением величины с заданной функцией распределения $F(\bullet)$.

Моделирование нормального стационарного закона распределения состояний процесса ARTA выполняется непосредственным линейным преобразованием $\xi(t)$ стационарного гауссовского СП с единичной дисперсией и заданной автокорреляционной функцией

$$\zeta(t) = M[\zeta] + \sigma[\zeta] \cdot \xi(t), \quad (14)$$

где $M[\zeta]$ – математическое ожидание стационарного процесса ARTA, $\sigma[\zeta]$ – его стандартное отклонение. Подход и результаты моделирования ARTA в пакете СМ-ДЭС представлены на рис. 11. Агрегат AS1 на рис. 11 а предназначен для сбора статистики о реализациях моделируемого процесса. На рис. 12–13 представлены результаты статистического анализа автокорреляционной структуры и распределения состояний моделируемого процесса ARTA в пакете Statgraphics.

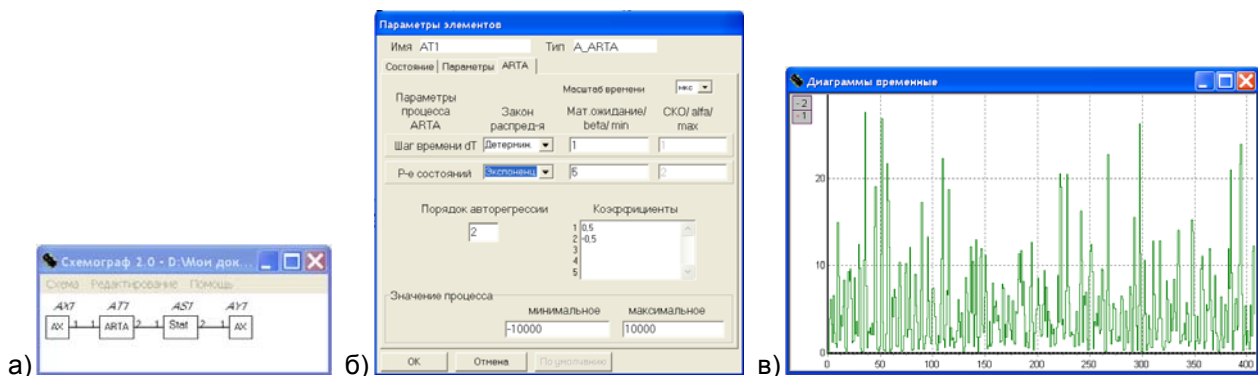


Рис. 11. Моделирование процесса ARTA: модель в пакете СМ-ДЭС (а), параметры агрегата, моделирующего процесс ARTA (б), пример реализации (в)

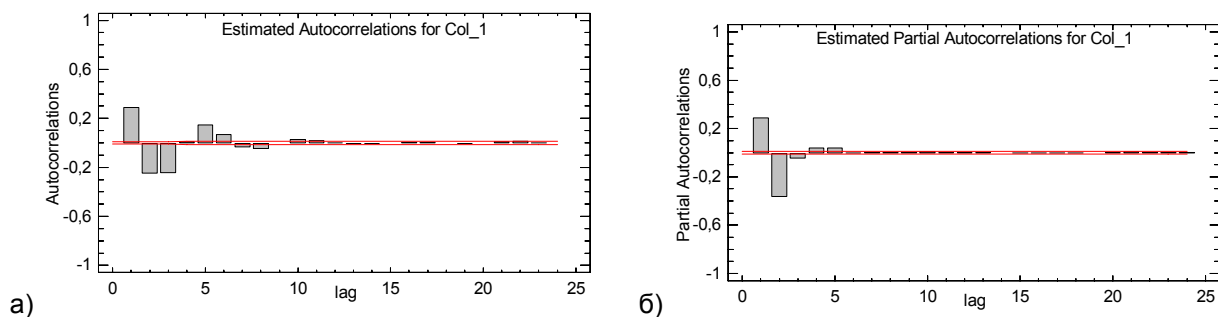


Рис. 12. Анализ автокорреляционной структуры процесса ARTA в пакете Statgraphics

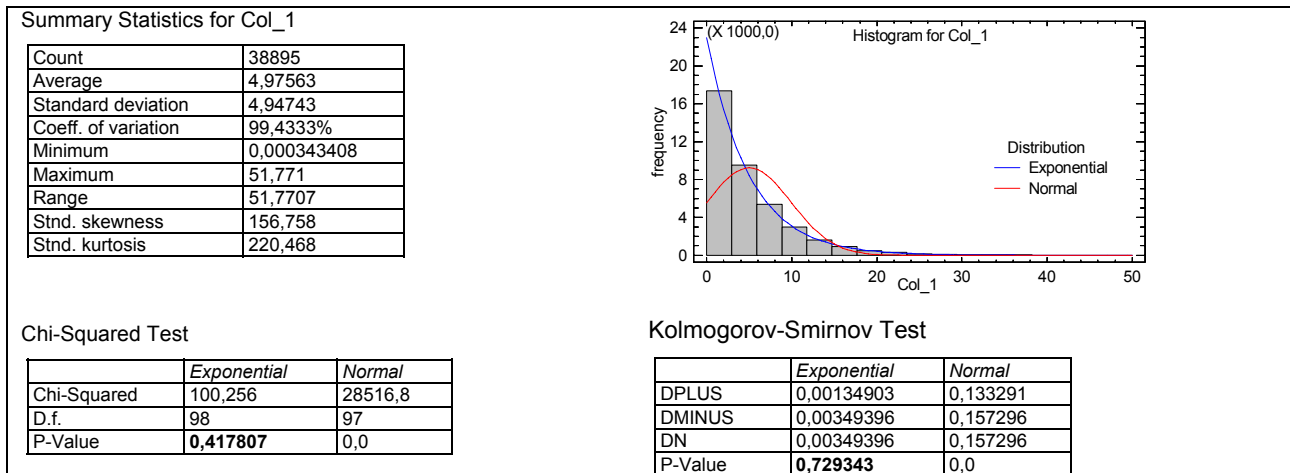


Рис. 13. Статистический анализ распределения состояний процесса ARTA в пакете Statgraphics

3. Примеры использования пакета СМ-ДЭС для имитационного моделирования систем

3.1. Задача о разорении игрока

Укажем решение задачи о разорении игрока, приведенной, например, в [4, с. 333], методом статистического моделирования в пакете СМ-ДЭС. Визуальное изображение имитационной модели СП «разорения игрока» в СМ-ДЭС представлено на рис. 14 а. Элемент AW1 непосредственно моделирует процесс случайного блуждания. Его вероятностные характеристики заданы в окне на рис. 14 б. Здесь вероятность проигрыша одной денежной единицы при ставке на «черное» в европейской рулетке – $19/37$, выигрыша – $18/37$. Начальный капитал игрока составляет 50 д.е.

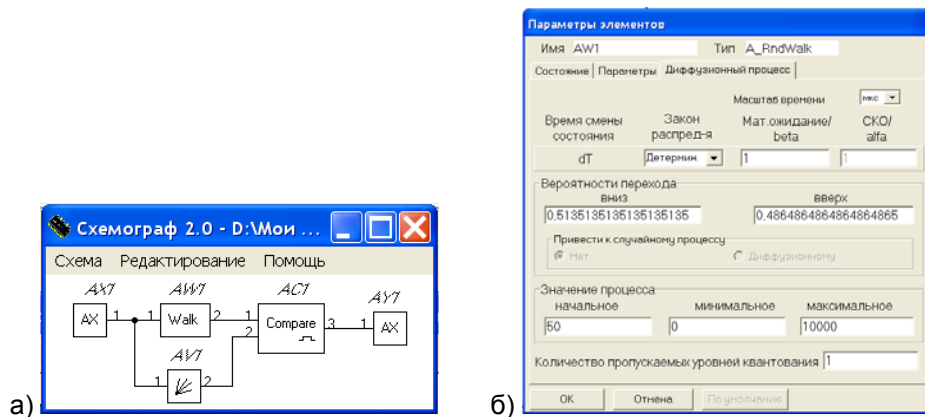


Рис. 14. Имитационная модель СП «разорения игрока» в пакете СМ-ДЭС

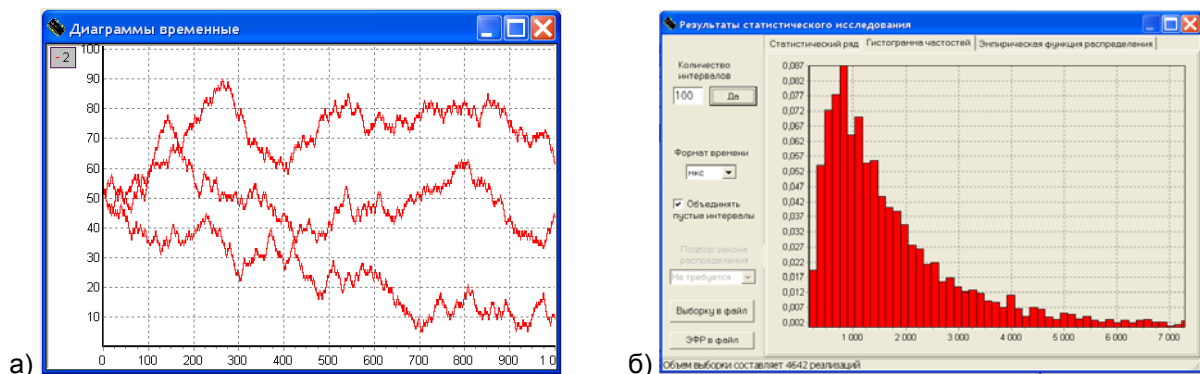


Рис. 15. Примеры реализаций СП «разорения игрока» (а) и статистическое распределение времени до разорения в пакете СМ-ДЭС (б)

На рис. 15 а представлены примеры реализаций процесса «разорения игрока» в СМ-ДЭС, а на рис. 15 б – результаты статистического анализа «времени разорения» по 4642 реализациям данного процесса. При этом среднее время до разорения составило 1930 ставок, оценка стандартного отклонения – 1600 ставок, наименьшее время до разорения среди наблюдаемых значений – 172 ставки, а наибольшее – 14582 ставки.

3.2. Имитационное моделирование параметрического отказа вала

Рассмотрим работу вала (рис. 16) при постоянной износной нагрузке $F_N(t) = F_N$ с целью определения вероятности безотказной работы в течение наработки t по критерию превышения допустимого значения износа ΔR_{\max} . Примером подобной системы может служить силовая система рельсо-колесо-колотка железнодорожного подвижного состава.

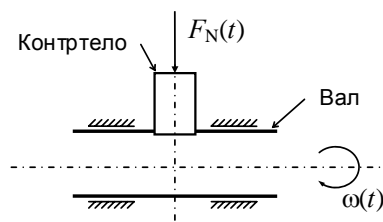


Рис. 16. Структурная схема взаимодействия вала и контртела

Примем следующие допущения:

- сила (износная) постоянна: $F_N(t) = F_N$;
- площадь взаимодействия тел не изменяется, а взаимодействие осуществляется только на линии касания (данное допущение выполняется, например, когда контртело не подвержено износу);
- угловая скорость вращения вала постоянна $\omega(t) = \omega$.

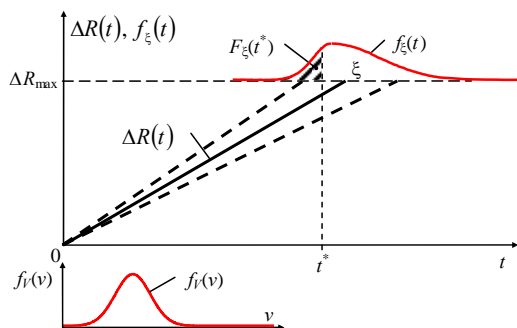


Рис. 17. Верный процесс износа вала

В данных условиях величина износа вала $\Delta R(t)$ прямо пропорциональна наработке t :

$$\Delta R(t) = R(0) - R(t) = V \cdot t, \quad (15)$$

где V – «скорость износа», определяемая материалом вала (в том числе, коэффициентом трения), угловой скоростью вала ω и силой F_N , $R(t)$ – радиус вала в момент наработки t .

В силу анизотропии материала вала скорость его износа V является случайной величиной с функцией плотности распределения $f_v(v)$. Тогда величина износа вала $\Delta R(t)$ в течение наработки t представляет собой верный СП (рис. 17).

Для некоторых типовых распределений скорости износа V_0 известно [8] аналитическое решение поставленной задачи: функция плотности распределения $f_x(t)$ наработки вала до отказа, функция отказа $F_x(t)$, средняя наработка до отказа и другие показатели. Так, при условии нормального распределения скорости износа V наработка вала до отказа подчиняется альфа-распределению с параметрами $\alpha = M[V] / \sigma[V]$ и $\beta = \Delta R_{\max} / \sigma[V]$ [8].

Для произвольных распределений скорости износа V можно получить решение с помощью имитационного моделирования, которое заключается в многократной реализации СП деградации элементов механической системы во времени до неработоспособного состояния, сборе и анализе статистики о времени наработки объекта до отказа.

Концептуальная модель износа вала в пакете СМ-ДЭС [9] представлена на рис. 18 а. Здесь агрегат AV2 имитирует веерный СП (1) с заданными вероятностными характеристиками; агрегат AV1 имитирует максимально допустимое значение износа ΔR_{\max} ; агрегат AC1 вырабатывает сигнал «высокого» уровня, если уровень сигнала на выходе агрегата AV1 превышает уровень сигнала на выходе AV2, что соответствует работоспособному состоянию вала и вырабатывает сигнал «низкого» уровня в противном случае; AX1, AY1 – вспомогательные агрегаты, необходимые для управления моделированием.

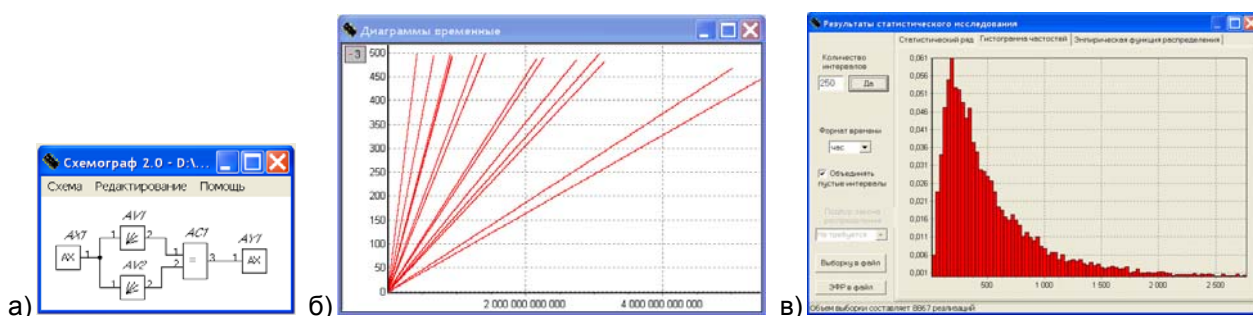


Рис. 18. Модель веерного процесса износа вала в СМ-ДЭС (а); пример нескольких реализаций данного процесса (б); гистограмма частот наработки вала до отказа в СМ-ДЭС (в)

Если, например, параметр V -веерного процесса (15) подчиняется логнормальному распределению с математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным $5 \cdot 10^{-10}$ мкм/мкс, некоторое множество реализаций процесса износа вала в пакете СМ-ДЭС представлено на рис. 18 б. При этом фиксировалось время наработки вала до отказа. Гистограмма частот полученных значений представлена на рис. 18 в.

Для критерия обеспечения точности средней наработки вала до отказа в 4 % относительно точечного значения были получены следующие оценки показателей надежности (табл. 1).

Таблица 1. Результаты имитационного моделирования безотказности вала

Заданная точность оценки средней наработки вала до отказа относительно точечного значения	4 %
Объем выборки реализаций имитационной модели вала до отказа	8867
Точечная оценка средней наработки вала до отказа, ч	550,028
Точечная оценка стандартного отклонения наработки вала до отказа, ч	531,841
Точечная оценка вероятности безотказной работы вала в течение 200 ч	0,783065

4. Заключение

Имитационное моделирование является одним из наиболее универсальных методов анализа сложных систем. В некоторых задачах процесс функционирования исследуемой системы выражается через типовые СП, модели которых широко известны в теории вероятностей. В этой связи, для создания адекватных моделей в программных пакетах автоматизации имитационного моделирования должны быть реализованы алгоритмы большого количества классов типовых СП.

В работе представлен справочный материал по многим классам СП, допускающим алгоритмическое описание, которые применимы для имитационного моделирования технических систем, технологических и экономических процессов. Показана реализация данных СП в программном комплексе автоматизации имитационного моделирования СМ-ДЭС.

Приведены примеры решения самых разнообразных задач: теории игр и параметрической надежности методом имитационного моделирования в пакете СМ-ДЭС. Показана возможность и технология решения широкого класса других теоретических и практических задач, сводящихся к моделированию СП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cario M.C. Autoregressive to anything: Time-series input processes for simulation / Marne C. Cario, Barry L. Nelson // Operations Research Letters. – 1996. – Vol. 19. – P. 51 – 58.
2. Кельтон В. Имитационное моделирование. Классика CS / В. Кельтон, А. Лоу. – [3-е изд.]. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.
3. Харин Ю.С. Математические и компьютерные основы статистического анализа данных и моделирования: учеб. пособие / Харин Ю.С., Малюгин В.И., Абрамович М.С. – Мн.: БГУ, 2008. – 455 с.
4. Матальцкий М.А. Вероятность и случайные процессы: теория, примеры, задачи: учеб. пособие / Матальцкий М.А. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 588 с.
5. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. – [репр. изд.]. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 912 с.
6. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
7. Надежность и эффективность в технике: Справочник: в 10 т. – Т. 2: Математические методы в теории надежности и эффективности / Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Машиностроение, 1987. – 280 с.
8. ГОСТ 27.005-97. Надежность в технике. Модели отказов. Основные положения. – Мн.: Госстандарт, 2005. – 15 с.
9. Shevchenko D.N. Program Technological Complex of a Research of Safety of Electronic Systems / D.N. Shevchenko // Computer Data Analysis and Modeling: Robustness and Computer Intensive Methods: Proc. 6-h International Conference. – Minsk: BSU, 2001. – Vol. 2. – P. 208 – 213.

Стаття надійшла до редакції 17.11.2009