

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ НАПІРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В СЕРЕДОВИЩІ З ТОНКИМИ КАНАЛАМИ

Анотація. Побудовано математичну модель, яка описує процес напірної фільтрації в середовищі з тонкими каналами. Проведено низку розрахунків і досліджено залежність тиску та швидкості руху рідини при різних показниках напору і коефіцієнта фільтрації. Представлені і проаналізовані результати обчислювальних експериментів з визначенням тиску і швидкості руху рідини в рамках запропонованої моделі. На основі одержаних результатів зроблено висновок про застосовність сформульованої моделі.

Ключові слова: тонкий канал, комп'ютерне моделювання, рух рідини, напірна фільтрація, включення, п'єзометричний напір.

Аннотация. Построена математическая модель, которая описывает процесс напорной фильтрации в среде с тонкими каналами. Проведен ряд расчетов и исследована зависимость давления и скорости движения жидкости при разных показателях напора и коэффициента фильтрации. Представлены и проанализированы результаты вычислительных экспериментов с определением давления и скорости движения жидкости в рамках предложенной модели. На основе полученных результатов сделан вывод о применимости сформулированной модели.

Ключевые слова: тонкий канал, компьютерное моделирование, движение жидкости, напорная фильтрация, включение, пьезометрический напор.

Abstract. A mathematical model describing pressure filtration process in the environment with thin channels is proposed. A series of calculations is performed and the dependence of pressure and fluid flow velocity under different indices of the push and filtration coefficient is investigated. The results of calculation experiments with determination of pressure and fluid velocity within the offered model's framework are presented and analyzed. Conclusions on applicability of the formulated model are made by the results obtained.

Keywords: pressure filtration process, thin channels environment, fluid flow velocity.

1. Вступ

Важливим питанням сьогодення є ефективно використання водних ресурсів планети. Для передбачення ймовірних наслідків використання потрібно здійснювати вивчення та моделювання процесів перенесення води в природному середовищі. Різноманітні аспекти математичного моделювання та числового аналізу процесів перенесення в таких середовищах розглянуто, зокрема, в роботах [1–4], де значну увагу зосереджено на теоретичному обґрунтуванні запропонованих математичних моделей та числових підходів. Для врахування складніших розподілів швидкостей необхідно доповнити відповідні математичні моделі рівняннями теорії фільтрації, адаптованими до наявності тонких включень чи каналів. Метою даної роботи є висвітлення результатів комп'ютерного моделювання процесу напірної фільтрації гравітаційної рідини у середовищі з тонкими каналами, в яких відбуваються протікання рідини і аналіз отриманих результатів.

2. Концептуальна модель

Сформулюємо основні положення, які стосуються розглянутого в даній роботі неоднорідного середовища та процесів, що в ньому протікають. Під неоднорідним середовищем в контексті роботи розуміємо обмежене проникне тіло з включеннями. Включенням називається тонкий канал, в якому відбувається протікання рідини. Тіло є однорідним (рис. 1), середовище повністю насичене рухомим однокомпонентним розчином рідини. У



Рис. 1. Пористе середовище з включеннями

кових джерел чи стоків, неізотермічних, хіміко-біологічних чи міжфазних процесів не передбачається.

Основні математичні співвідношення, використані для побудови моделі руху рідини в середовищі і у включеннях, описані в роботі [5].

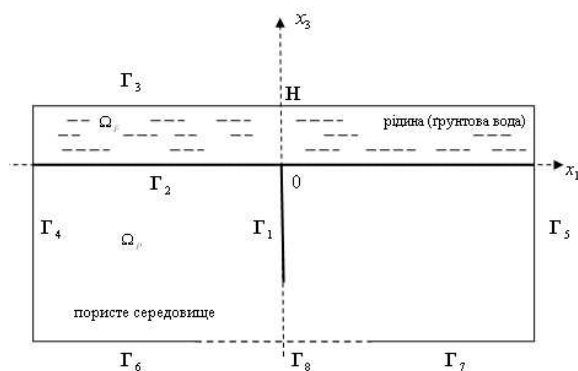


Рис. 2. Пористе середовище з тонким каналом

витік рідини під власною вагою, H – висота стовпа рідини, k – коефіцієнт фільтрації в Ω_p .

Для опису процесу фільтрації у пористому середовищі, що містить канал, розглянемо п'єзометричний напір:

$$h = \frac{p}{\rho g} + x_3. \quad (1)$$

Значення напору в Ω_f і вздовж каналу Γ_1 знайдемо з рівнянь Нав'є-Стокса для не-в'язкої рідини, в якому знехтували нелінійними щодо витрат доданками, та рівняння нерозривності для нестисливої рідини для випадку, коли рух відбувається лише вздовж осі x_3 . Знайдене значення напору:

$$h = H. \quad (2)$$

При цьому зауважимо, що розглядається усталений за часом процес, а також припустили, що рух рідини відбувається лише вздовж осі x_3 .

На границі витоку рідини Γ_8 швидкість фільтрації рівна k (рідина рухається лише під власною вагою).

Врахувавши всі вище зазначені умови, отримаємо математичну модель для знаходження п'єзометричного напору, який в Ω_p задовольняє рівняння Лапласа:

включеннях відбувається рух однорідної, не-в'язкої, ізотропної рідини, яка є нестисливою і ідеальною. Тобто, ми будемо розглядати рідину, яка має назву гравітаційна вода (грунтова вода) – це вода вільна, не залежна від сил притягання до поверхні твердих частинок. Вона переміщується під впливом сили тяжіння, в ній діє лише гідродинамічний тиск. Поле швидкостей руху розчину вільне від стиску та обертання, тобто потік є нестисливим та ламінарним. Контакт між тілом і включеннями є ідеальним. Наявність додат-

3. Математичне формулювання задач

Розглянемо процес фільтрації в області Ω з тонким каналом (рис. 2). Область Ω складається з підобласті Ω_f , заповненої рідиною, і Ω_p .

Вздовж внутрішньої лінії Γ_1 розміщено тонкий канал (надалі товщиною каналу нехтуємо). Позначимо Γ_2 – границя між рідиною і пористим середовищем, $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ – непроникні границі, Γ_8 – проникна границя, через яку відбувається

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} = 0 \quad (3)$$

та такі граничні умови:

$$h = H \text{ на } \Gamma_1, \Gamma_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0 \text{ на } \Gamma_4, \Gamma_5, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \text{ на } \Gamma_6, \Gamma_7, \quad (6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_3} = 1 \text{ на } \Gamma_8. \quad (7)$$

Знайшовши значення напору, отримаємо опис руху рідини згідно з законом Дарсі:

$$u = -k \operatorname{grad}(h), \quad (8)$$

де u – вектор швидкостей.

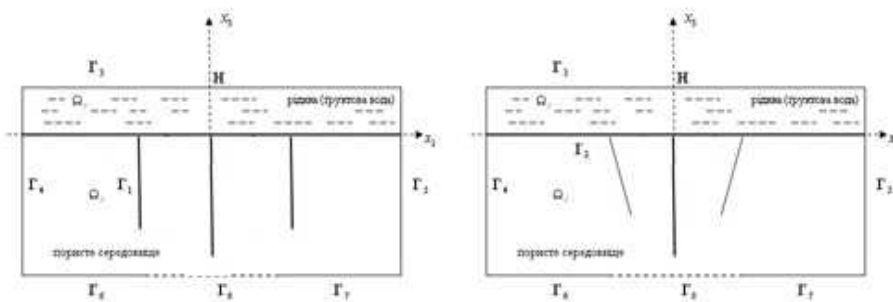


Рис. 3. Пористе середовище з тонкими каналами

Теорія поширюється на область Ω_p , яка містить декілька включень. Числові розрахунки проведені для пористого середовища з трьома тонкими каналами різної довжини (рис. 3).

Для числового дослідження запропонованої математичної моделі використовуємо метод скінченних елементів з трикутними елементами.

Для числово-

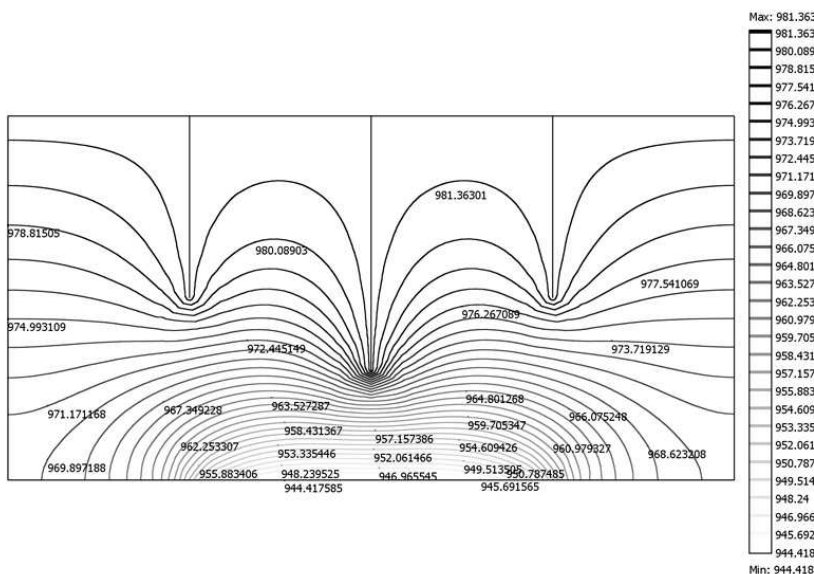


Рис. 4. Розподіл тиску для $k = 0,01 \text{ м} / \text{с}$; $H = 0,1 \text{ м}$ ($P, [1 \text{ Па}]$)

4. Результати числового аналізу

Наведемо результати числового аналізу математичної моделі (3)-(8). Результати обчислень тиску і швидкості фільтрації рідини подані у вигляді рисунків. Розподіл h обчислюємо в області $\Omega_p = (0,2) \times (0,1)$. Довжина першого і третього каналів 0,5 м і довжина другого каналу 0,7 м, поле швидкостей u і поле тиску p знаходимо

згідно з формулами, поданими в [5]. Розв'язок будувався на області, яка складається з 350 скінченних трикутних елементів.

Подемо нижче результати розрахунків розподілу тиску і поля швидкостей для різних коефіцієнтів фільтрації k і висоти стовпа води H .

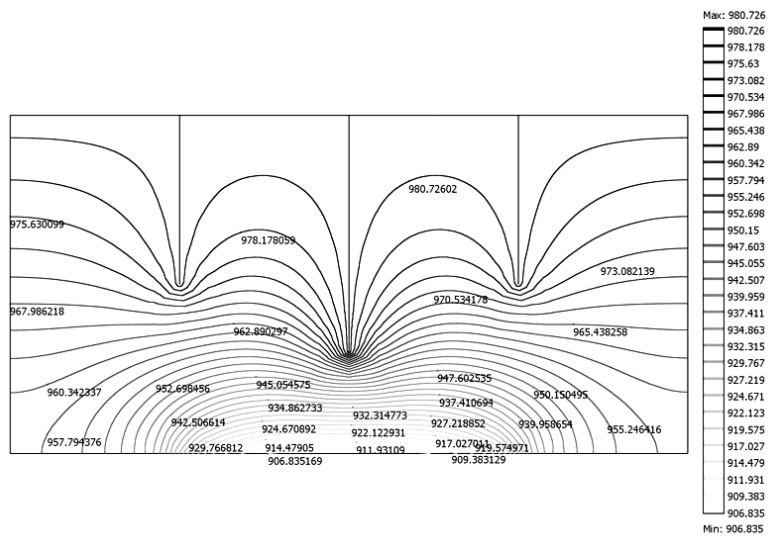


Рис. 5. Розподіл тиску для $k = 0,02 м/с$; $H = 0,1 м$ (P, [1 Pa])

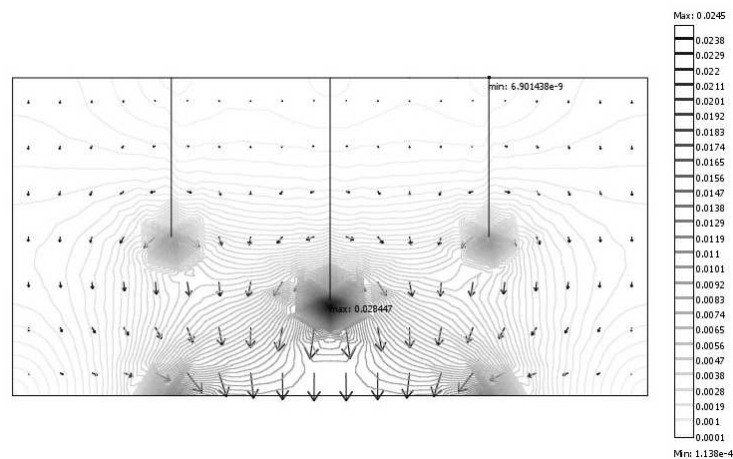


Рис. 6. Поле швидкостей для $k = 0,01 м/с$; $H = 0,1 м$ (u, [1 m/s])

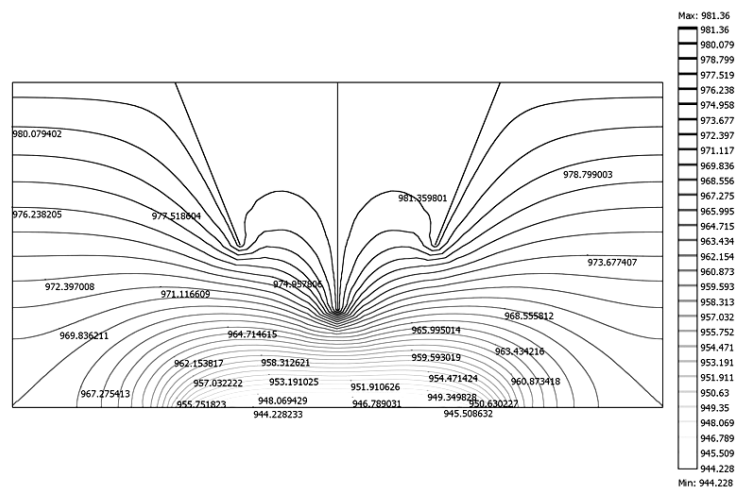


Рис. 7. Розподіл тиску для $k = 0,01 м/с$; $H = 0,1 м$ (P, [1 Pa])

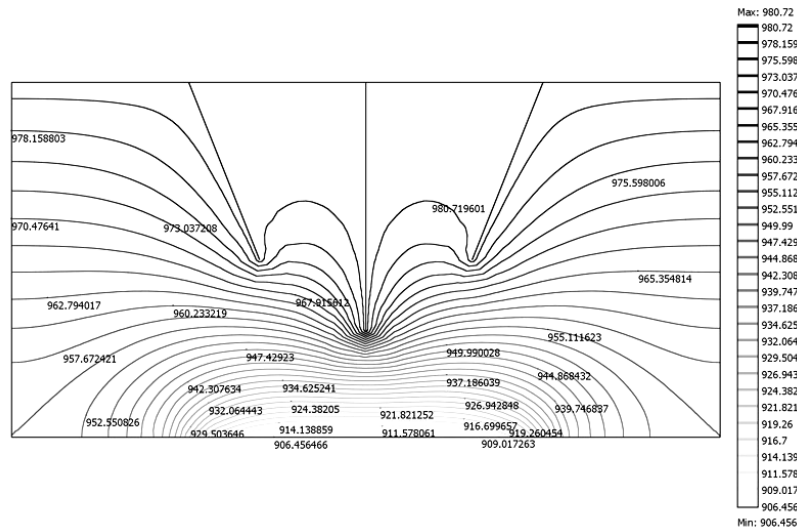


Рис. 8. Розподіл тиску для $k = 0,02 м/с$; $H = 0,1 м$ (P , [1 Pa])

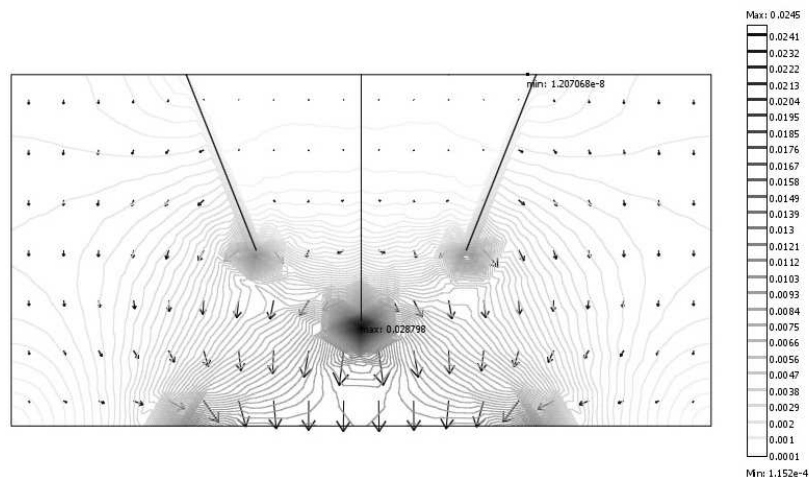


Рис. 9. Поле швидкостей для $k = 0,01 м/с$; $H = 0,1; 1 м$ (u , [1 m/s])

З отриманих результатів можемо побачити, що для різних показників коефіцієнта фільтрації і сталого показника висоти стовпа рідини змінюється розподіл тиску в середовищі, а при сталому коефіцієнті фільтрації і різних показниках H швидкість залишається незмінною. Аналогічні висновки були отримані для неоднорідного середовища з одним включенням. Для даної задачі розглянуто конкретно визначені показники початкового напору і коефіцієнта фільтрації, але дана модель може бути застосована також і для інших вхідних даних.

5. Висновки

У даній роботі сформульовано математичну модель, яка описує процес напірної фільтрації в середовищі з тонкими каналами. Отримано і подано у вигляді рисунків дані розрахунків задач на визначення тиску і швидкості рідини, які відповідають фізиці відповідних процесів. За допомогою числових експериментів здійснено аналіз отриманих результатів. Згідно з аналізом зроблено висновки, що для різних показників коефіцієнта фільтрації і сталого показника висоти стовпа рідини змінюється розподіл тиску в середовищі, а при сталому

коефіцієнті фільтрації і різних показниках H швидкість залишається незмінною. Аналогічні висновки були отримані для середовища з одним включенням, тобто можемо зробити висновок, що сформульована математична модель є справедливою для середовища з довільною кількістю тонких каналів. Отримані результати можуть бути використані під час побудови математичної моделі, яка описує адвекційно-дифузійний процес масоперенесення в каналі і в області.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурак Я.Й. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я.Й. Бурак, Є.Я. Чапля, Т.С. Нагірний. – Львів: Сполом, 2004. – 264 с.
2. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2001. – 605 с.
3. Мандзак Т.І. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Т.І. Мандзак, Я.Г. Савула / НАН України. Центр математики моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстигала. – Львів: Сплайн, 2009. – 148 с.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / Полубаринова-Кочина П.Я. – М.: Недра, 1977. – 664 с.
5. Слупко О.М. Моделювання процесу руху гравітаційної води у пористому середовищі з каналом / О.М. Слупко, Т.І. Мандзак, Я.Г. Савула // Вісник Львівського університету. – (Серія «Прикладна математика та інформатика»). – 2009. – Вип. 15. – С. 258 – 266.

Стаття надійшла до редакції 02.09.2010