

## АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ АЛГОРИТМУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

\*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

**Анотація.** У статті запропоновано алгоритм диференціальної еволюції для найкращої рівномірної апроксимації функцій багатьох змінних. Наведені результати обчислювальних експериментів, які підтверджують його ефективність. Показані переваги алгоритму диференціальної еволюції порівняно з традиційними алгоритмами апроксимації.

**Ключові слова:** алгоритм диференціальної еволюції, функція багатьох змінних, найкраща рівномірна апроксимація.

**Аннотация.** В статье предложен алгоритм дифференциальной эволюции для наилучшей равномерной аппроксимации функций многих переменных. Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие его эффективность. Показаны преимущества алгоритма дифференциальной эволюции по сравнению с традиционными алгоритмами аппроксимации.

**Ключевые слова:** алгоритм дифференциальной эволюции, функция многих переменных, наилучшая равномерная аппроксимация.

**Abstract.** It is proposed a differential evolution algorithm for best uniform approximation of many-variables functions. It is presented numerical experiments results confirming the algorithm efficiency. It is shown advantages of the differential evolution in comparison with the traditional approximation algorithms.

**Keywords:** differential evolution algorithm, many-variables function, best uniform approximation.

### 1. Вступ

Найкращі рівномірні (чебишовські) наближення функцій використовують для виконання розрахунків у багатьох областях науки і техніки [1–11]. Для випадку функцій однієї змінної створено ефективні алгоритми наближення лінійними апроксимантами (многочленами, узагальненими поліномами та ін.), а також деякими типами нелінійних апроксимантів [1, 3, 10, 12]. Алгоритмічний арсенал для апроксимації функцій багатьох змінних є значно скромнішим. Знайти найкраще наближення у багатовимірному випадку досить складно, відповідні алгоритми використовують чисельні методи, які мають значну обчислювальну трудомісткість як самих розрахунків, так і підготовки даних.

У статті для найкращого рівномірного наближення функції багатьох змінних пропонується алгоритм диференціальної еволюції (ДЕ). Він ґрунтується на моделюванні процесу створення, модифікації та відбору кращих розв'язків (у термінах алгоритму ДЕ – векторів) з метою появи нових, ще кращих варіантів розв'язання задачі. Алгоритм ДЕ простий у реалізації та використанні (містить мало параметрів, що потребують підбору), легко розпаралелюється.

### 2. Постановка задачі

Нехай  $D = \{X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{lk})\}_{k=1}^m$  – множина точок  $l$ -вимірного простору,  $f(X)$  – задана на  $D$  функція,  $\Phi$  – клас функцій  $\{\varphi(X; a_1, a_2, \dots, a_n)\}$ , де  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – параметри. Задача найкращої зваженої (з ваговою функцією  $w(X) > 0$ ) рівномірної апроксимації формулюється таким чином. Необхідно знайти величину

$$\rho = \min_{\varphi \in \Phi} \max_{X_k \in D} |f(X_k) - \varphi(X_k; a_1, \dots, a_n)| w(X_k) \quad (1)$$

і функцію  $\varphi(X; a_1^*, \dots, a_n^*)$  з класу  $\Phi$ , для якої

$$\max_{X_k \in D} |f(X_k) - \varphi(X_k; a_1^*, \dots, a_n^*)| w(X_k) = \rho. \quad (2)$$

Величина  $\rho$  і функція  $\varphi(X; a_1^*, \dots, a_n^*)$  називаються відповідно похибкою та апроксимантом найкращого рівномірного (чебишовського, мінімаксного) наближення. При  $w(X) \equiv 1$  маємо задачу найкращого абсолютного наближення, при  $w(X) = 1/f(X)$  – найкращого відносного наближення.

Єдиність апроксиманта найкращого рівномірного наближення для функції багатьох змінних у загальному випадку не доведена. В залежності від функції  $f(X)$ , класу  $\Phi$  і області  $D$  апроксимант найкращого наближення може бути один або таких апроксимантів може бути багато [1].

Методи й алгоритми наближення функцій багатьох змінних розроблені в основному для випадку, коли апроксимант  $\varphi$  залежить від параметрів  $a_1, \dots, a_n$  лінійно, наприклад, є узагальненим поліномом

$$\varphi(X; a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_j \psi_j(X) \quad (3)$$

за системою базисних функцій  $\psi_1(X), \dots, \psi_n(X)$ . Найбільшого поширення на практиці для знаходження апроксимантів вигляду (3) набув підхід, який полягає у зведенні задачі найкращого рівномірного наближення до задачі лінійного програмування [1, 13–16]. Крім того, для побудови узагальненого полінома (3) можна застосовувати методи мінімізації опуклих функцій, зокрема, метод узагальненого градієнтного спуску, та інші методи без використання похідних функції [17, 18].

Для випадку, коли параметри  $a_1, \dots, a_n$  входять в апроксимант нелінійно, алгоритми найкращого рівномірного наближення розроблені переважно для апроксимації раціональними дробами. Зокрема, декілька алгоритмів дробово-раціонального наближення функцій багатьох змінних [19, 20] створено на основі методу диференціальної корекції для функції однієї змінної [21], в якому розв'язання задачі нелінійної апроксимації зводиться до послідовного розв'язання задач лінійного програмування.

Кожний з алгоритмів багатовимірної апроксимації має свої переваги й недоліки, але водночас спільним для них є вузька спеціалізація, тобто наближення апроксимантами тільки певного класу, а також громіздкість чисельної реалізації. Тому актуальна задача створення універсальних і водночас ефективних та нескладних у реалізації алгоритмів найкращої рівномірної апроксимації функцій багатьох змінних.

У статті пропонується підхід, згідно з яким параметри апроксиманта найкращого рівномірного наближення для функції багатьох змінних знаходяться за допомогою методу диференціальної еволюції як розв'язок задачі оптимізації

$$\begin{aligned} \Lambda &= \min, \\ -\Lambda &\leq [f(X_k) - \varphi(X_k; a_1, \dots, a_n)] w(X_k) \leq \Lambda, \\ X_i &\in D, k = \overline{1, m}, \Lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

### 3. Диференціальна еволюція

Метод ДЕ, запропонований Р. Сторном і К. Прайсом [22], служить для знаходження глобального оптимуму недиференційованих, нелінійних, мультимодальних функцій багатьох змінних і належить до прямих методів оптимізації, тобто в ході його роботи потрібно обчислювати лише значення цільової функції (критерію оптимізації), але не її похідних.

Еволюційний процес в алгоритмі ДЕ організовано таким чином. Спочатку з використанням випадкових чисел генерується деяка множина векторів (покоління популяції), які представляють собою можливі розв'язки задачі оптимізації. Далі на кожній ітерації алгоритму (епосі еволюційного процесу) створюється нове покоління. Для кожного вектора старого покоління, який називається базовим вектором, генерується мутантний вектор з використанням трьох інших випадкових векторів і операцій додавання та віднімання їхніх координат. Над мутантним вектором виконується операція схрещування, в ході якої деякі його координати заміщуються координатами базового вектора. Отриманий після схрещування вектор називається пробним. Якщо він виявляється кращим за базовий вектор (значення цільової функції покращилось), то в новому поколінні базовий вектор замінюється на пробний, у протилежному випадку базовий вектор зберігається в новому поколінні. Таке правило гарантує незмінність розміру популяції в процесі роботи алгоритму. На кожній ітерації для контролю швидкості пошуку оптимального розв'язку визначається кращий вектор покоління. Умовами завершення еволюційного процесу (закінчення алгоритму) можуть бути, наприклад, досягнення задовільного значення критерію оптимізації, вичерпання заданого максимального числа поколінь та ін.

У цілому алгоритм ДЕ представляє собою одну з можливих «неперервних» модифікацій генетичного алгоритму. Водночас він має суттєву особливість, яка багато в чому визначає його властивості. Як джерело шуму при мутації в алгоритмі ДЕ застосовується не зовнішній генератор випадкових чисел, а «внутрішній», реалізований як різниця між випадково вибраними векторами поточної популяції. Завдяки цьому алгоритм може динамічно моделювати особливості рельєфу функції, що оптимізується, підлаштовуючи під них розподіл «вбудованого» джерела шуму. Саме цим пояснюється здатність алгоритму швидко проходити складні яри, забезпечуючи ефективність навіть у випадку складного рельєфу.

Для знаходження найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних пропонується такий алгоритм диференціальної еволюції.

1. Генерується початкове покоління векторів  $V_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ ,  $i = \overline{1, Np}$ , де  $Np$  – розмір популяції (один з параметрів налаштування алгоритму). Координати  $v_{ji}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , кожного вектора – випадкові числа з проміжку  $[num_1, num_2]$  (за умовчанням  $num_1 = -1$ ,  $num_2 = 1$ ).

2. Для базового вектора  $V_i$  ( $i = \overline{1, Np}$ ) зі старого покоління вибирається три випадкових вектори  $V_b, V_c, V_d$  ( $b \neq c \neq d \neq i$ ), і створюється мутантний вектор  $\tilde{V}_b$  за правилом

$$\tilde{V}_b = V_b + Fm(V_c - V_d),$$

де  $Fm$  – деяка додатна дійсна стала з проміжку  $[0, 2]$ , яка називається силою мутації і є параметром алгоритму. Сила мутації  $Fm$  визначає амплітуду збурень, які вносяться в вектор  $V_b$  зовнішнім шумом.

3. Обчислюються координати пробного вектора  $U_i$  за формулою

$$u_{ji} = \begin{cases} \tilde{v}_{jb}, & \text{якщо } \text{rand}(0,1) \leq Cr \vee j = j_{rand} \\ v_{ji}, & \text{якщо } \text{rand}(0,1) > Cr \wedge j \neq j_{rand} \end{cases},$$

де  $\text{rand}(0,1)$  – випадкове число з інтервалу  $(0,1)$ ,  $Cr$  – задана ймовірність схрещування (ще один параметр алгоритму ДЕ), з якою нащадок  $U_i$  спадкує спотворену мутацією генетичну ознаку від вектора  $V_b$ .

4. Для кожного вектора  $V_i$  обчислюється цільова функція  $F$ :

$$F(V_i) = \max_{1 \leq k \leq m} |f(X_k) - \varphi(X_k; v_{1i}, \dots, v_{ni})| w(X_k), \quad i = \overline{1, Np}, \quad (5)$$

і для включення в нове покоління вибирається той з векторів  $U_i$  і  $V_i$ , значення цільової функції якого менше. Такий оператор вибору гарантує, що найкраще значення цільової функції не буде пропущено, що приводить до швидкої збіжності алгоритму.

5. Алгоритм завершує еволюційний процес, якщо виконується одна з умов:

- значення цільової функції найкращого вектора покоління менше заданого  $\varepsilon$ ;
- вичерпано максимальне число поколінь популяції  $p_{\max}$ ;
- відбувається стагнація еволюційного процесу, тобто відносний розкид значень цільової функції в популяції менше заданої величини  $\delta$ :

$$\max_{i=1, Np} F(V_i) - \min_{i=1, Np} F(V_i) < \delta \min_{i=1, Np} F(V_i).$$

За умовчанням  $\varepsilon = 10^{-12}$ ,  $p_{\max} = 200$ ,  $\delta = 10^{-4}$ . Якщо жодна з перелічених умов не виконується, то відбувається перехід до п. 2.

Зазначимо, що через стохастичний характер алгоритму ДЕ для отримання прийнятного результату потрібно зробити декілька запусків алгоритму.

За результатами тестування алгоритму рекомендовані значення сили мутації  $Fm$  лежать у діапазоні  $[0,4; 0,6]$ , а ймовірності схрещування  $Cr$  – в інтервалі  $[0,8; 1]$ .

Алгоритм ДЕ легко адаптується для знаходження найкращих середньоквадратичних наближень функцій декількох змінних, а також найкращих наближень за принципом мінімізації суми модулів різниць значень функції та апроксиманта. Для цього слід лише відповідним чином змінити формулу (5) для обчислення цільової функції.

#### 4. Результати обчислювальних експериментів

Для перевірки ефективності запропонованого алгоритму виконано серію обчислювальних експериментів по наближенню функцій багатьох змінних апроксимантами різних класів. Отримані похибки наближення та значення параметрів найкращих апроксимантів порівнювались з відповідними величинами, знайденими за спеціалізованими алгоритмами найкращої рівномірної апроксимації. Далі наведено декілька прикладів апроксимації за допомогою алгоритму ДЕ.

*Приклад 1.* Потрібно знайти узагальнені поліноми вигляду (3), які є найкращими абсолютними рівномірними наближеннями на множині точок трикутника  $1 \geq x \geq y \geq 0$  (крок сітки за обома змінними 0,2) для функцій  $e^{\frac{x+y}{2}}$ ,  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos x \sin y$  і  $y^2 \cos x$ .

Для знаходження найкращих апроксимантів вигляду (3) застосовано алгоритм ДЕ з такими значеннями вхідних параметрів: розмір популяції  $Np = 50$ , сила мутації  $Fm = 0,4$ , ймовірність схрещування  $Cr = 0,9$ , число точок сітки  $m = 21$ , число запусків алгоритму 10

(значення  $\varepsilon$ ,  $p_{\max}$ ,  $\delta$  – за умовчанням). Результати апроксимації наведено в табл. 1, де число координат  $n$  дорівнює кількості шуканих параметрів апроксимантів.

Для порівняння виконано також наближення вказаних функцій за допомогою алгоритму найкращої рівномірної апроксимації (НРА) функцій декількох змінних узагальненим поліномом [16], в якому використовується зведення до задачі лінійного програмування і розв’язання її модифікованим симплекс-методом. Як свідчать дані табл. 1, похибки наближення, отримані за алгоритмом ДЕ, практично збігаються з похибками, знайденими за допомогою значно складнішого алгоритму НРА.

Таблиця 1. Апроксимація функцій двох змінних в області  $1 \geq x \geq y \geq 0$

Функція	Апроксимант		Похибка апроксимації за алгоритмом НРА	Похибка апроксимації за алгоритмом ДЕ
	$n$	базисні функції		
$\frac{x+y}{e^2}$	3	1, $x$ , $y$	0,104425	0,104425
$\sqrt{x^2 + y^2}$	4	1, $x+y$ , $xy$ , $x^2+y^2$	0,035091	0,035091
$\cos x \sin y$	10	1, $x$ , $y$ , $x^2$ , $xy$ , $y^2$ , $x^3$ , $x^2y$ , $xy^2$ , $y^3$	0,001758	0,001758
$y^2 \cos x$	11	$x$ , $x^2$ , $xy$ , $y^2$ , $x^3$ , $x^2y$ , $xy^2$ , $x^4$ , $x^3y$ , $x^2y^2$ , $xy^3$	0,000188	0,0001886

*Приклад 2.* Необхідно наблизити функцію  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  на множині точок квадрата  $D = \{(x_i, y_j) : x_i = -1 + 0,2(i-1), y_j = -1 + 0,2(j-1), i = \overline{1,11}, j = \overline{1,11}\}$  дробом

$$R_{22}(x, y) = \frac{\sum_{0 \leq p+q \leq 2} a_{pq} x^p y^q}{1 + \sum_{1 \leq s+t \leq 2} b_{st} x^s y^t}.$$

Для знаходження найкращого абсолютного рівномірного наближення заданої функції  $f(x, y)$  апроксимантом  $R_{22}(x, y)$  застосовано алгоритм ДЕ з такими вхідними значеннями: число координат векторів  $n = 11$ , розмір популяції  $Np = 50$ , сила мутації  $Fm = 0,4$ , ймовірність схрещування  $Cr = 0,9$ , число точок сітки  $m = 121$ , число запусків алгоритму 10 (значення інших параметрів – за умовчанням). Отримано такі результати:

$$R_{22}(x, y) = \frac{1,00766685 - 0,20 \cdot 10^{-6} x + 0,64 \cdot 10^{-6} y - 0,33931027 x^2 + 0,49 \cdot 10^{-6} xy - 0,34028471 y^2}{1 - 0,76 \cdot 10^{-6} x - 0,12 \cdot 10^{-5} y + 0,78624649 x^2 + 0,65 \cdot 10^{-6} xy + 0,78346175 y^2},$$

$$\rho = 0,007667.$$

Для порівняння, найкращий рівномірний апроксимант

$$R_{22}(x, y) = \frac{1,00766664 - 0,6 \cdot 10^{-7} x + 0,5 \cdot 10^{-7} y - 0,34077789 x^2 + 0,16 \cdot 10^{-6} xy - 0,33881802 y^2}{1 - 0,2 \cdot 10^{-7} x - 0,2 \cdot 10^{-7} y + 0,78194464 x^2 + 0,20 \cdot 10^{-6} xy + 0,78776077 y^2},$$

знайдений за допомогою алгоритму НРА раціональними дробами [19], апроксимує задану функцію з похибкою  $\rho = 0,007666$ .

*Приклад 3.* В експерименті досліджувалась залежність між продуктивністю фільтра

$z$  (в кг рідини на  $m^2$ ) і величиною вакууму  $y$  (в мм рт. ст.) при різних значеннях розміру  $x$  (у см) часток осаду, що промивався на фільтрі [23]. Необхідно підібрати емпіричну формулу, що наближає наведені в табл. 2 дані з найменшою відносною похибкою.

Таблиця 2. Експериментальні дані продуктивності фільтра

Розмір часток (у см)	Величина вакууму (в мм рт. ст.)					
	0,250	0,313	0,344	0,375	0,438	0,500
50	3144	4847	5883	6998	9535	12537
75	3811	4847	7205	8579	11680	15073
100	4402	6853	8320	9986	13486	17616
125	4976	7662	9302	11075	15073	19694

Слід зазначити, що задача побудови емпіричних формул, які найкращим чином апроксимують експериментальні дані (дані спостережень, дослідів і т.д.), часто виникає при вивченні різних фізичних явищ і процесів. Ще Лаплас сформулював важливе в методологічному плані твердження, що тільки наближення за критерієм найкращої рівномірної апроксимації (1) дозволяють строго ставити і вирішувати питання про те, чи вкладаються отримані дані в емпіричну формулу того або іншого типу [1].

Аналіз даних табл. 2 по кожній змінній окремо показав, що для наближення функції продуктивності фільтра  $z$  доцільно взяти нелінійну емпіричну формулу вигляду  $z = ax^b y^c$ , де  $a, b, c$  – невідомі параметри. Для їх визначення застосовано алгоритм ДЕ і отримано емпіричну формулу  $z = 7012,258x^{1,9936}y^{0,4996}$ , яка наближає дані з табл. 2 з відносною похибкою 0,825 %. Оскільки показники степенів  $x$  і  $y$  у формулі близькі до 2 і 0,5 відповідно, то для апроксимації зручніше скористатися формулою  $z = \tilde{a} x^2 \sqrt{y}$ . За алгоритмом ДЕ знайдено оптимальне значення  $\tilde{a} = 7057,508$ . Відносна похибка наближення наведених у табл. 2 даних емпіричною формулою  $z = 7057,508x^2 \sqrt{y}$  не перевищує 0,893 %.

## 5. Висновки

У роботі запропоновано алгоритм диференціальної еволюції для знаходження оптимальних (за критерієм мінімуму рівномірного відхилення) значень параметрів апроксимантів. Результати обчислювальних експериментів підтвердили ефективність алгоритму для наближення функцій багатьох змінних. Основними перевагами алгоритму ДЕ, порівняно з традиційними алгоритмами найкращої рівномірної апроксимації, є універсальність (наближення лінійними і нелінійними апроксимантами різних типів), відсутність потреби у використанні чисельних методів, простота реалізації, а також можливість застосування (після незначної модифікації) для апроксимації функцій за іншими критеріями, наприклад, за критерієм мінімуму квадратичного відхилення.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Ремез Е.Я. – Киев: Наукова думка, 1969. – 623 с.
2. Ланнэ А.А. Оптимальный синтез линейных электрических цепей / Ланнэ А.А. – М.: Связь, 1969. – 293 с.
3. Попов Б.А. Приближение функций для технических приложений / Б.А. Попов, Г.С. Теслер. – Киев: Наукова думка, 1980. – 352 с.
4. Вакал Л.П. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації / Л.П. Вакал,

- А.О. Каленчук-Порханова // Математичні машини і системи. – 2006. – № 2. – С. 15 – 24.
5. Каленчук-Порханова А.А. Наилучшая чебышевская аппроксимация для сжатия численной информации / А.А. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Компьютерная математика. – 2009. – № 1. – С. 99 – 107.
6. Вакал Л.П. Розв'язання крайових задач з використанням програмних засобів чебишовських наближень / Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2010. – № 9. – С. 47 – 53.
7. Каленчук-Порханова А.О. Застосування найкращої чебишовської апроксимації для моделювання деяких фізичних процесів / А.О. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Математичне та комп'ютерне моделювання. – (Серія «Технічні науки»). – 2010. – № 4. – С. 111 – 118.
8. Вакал Л.П. Использование чебышевских приближений при решении смешанных задач для уравнений в частных производных / Л.П. Вакал, А.А. Каленчук-Порханова, Е.С. Вакал // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3 (42). – С. 119 – 123.
9. Вакал Л.П. Застосування чебишовської апроксимації при розв'язанні інтегральних рівнянь / Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2011. – № 10. – С. 78 – 84.
10. Чебишовське наближення термометричної характеристики германієвого мікросенсора / П.С. Малачівський, В.Ф. Мігін, В.В. Холевчук [та ін.] // Відбір і обробка інформації. – 2013. – Вип. 39. – С. 76 – 81.
11. Вакал Є. Найкраща апроксимація ядра інтегрального рівняння Фредгольма з використанням генетичного алгоритму / Є. Вакал, Ю. Вакал, Л. Вакал // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. – 2016. – Вип. 2 (36). – С. 17 – 22.
12. Каленчук-Порханова А.А. Пакет программ аппроксимации функций / А.А. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2008. – № 7. – С. 32 – 38.
13. Зуховицкий С.И. Алгоритм для решения чебышевской задачи приближения в случае конечной системы несовместных линейных уравнений / С.И. Зуховицкий // ДАН. – 1951. – Т. 79, № 4. – С. 561 – 564.
14. Александренко В.Л. Алгоритм построения приближённого равномерно-наилучшего решения системы несовместных линейных уравнений / В.Л. Александренко // Алгоритмы и алгоритмические языки. – 1968. – Вип. 3. – С. 57 – 74.
15. Кондратьев В.П. Алгоритм наилучшего приближения функций многих переменных / В.П. Кондратьев // Программы оптимизации (приближение функций). – 1972. – Вип. 3. – С. 20 – 48.
16. Каленчук-Порханова А.О. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних / А.О. Каленчук-Порханова, Л.П. Вакал // Комп'ютерні засоби, мережі і системи. – 2007. – № 6. – С. 141 – 148.
17. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач / Васильев Ф.П. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 374 с.
18. Малоземов В.Н. Наилучшее равномерное приближение функций нескольких аргументов / В.Н. Малоземов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 3. – С. 575 – 586.
19. Петрак Л.В. Приближение функций многих переменных рациональными дробями / Л.В. Петрак // Программы оптимизации (приближение функций). – 1975. – Вип. 6. – С. 130 – 144.
20. Kaufman E.H. Uniform rational approximation on functions of several variables / E.H. Kaufman, G.D. Taylor // Int. J. Numer. Math. Eng. – 1976. – Vol. 9, N 2. – P. 297 – 323.
21. Cheney E.W. Two new algorithms for rational approximation / E.W. Cheney, H.L. Loeb // Numer. Math. – 1961. – Vol. 3, N 1. – P. 72 – 75.
22. Storn R. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces / R. Storn, K. Price // Journal of Global Optimization. – 1997. – Vol. 11. – P. 341 – 359.
23. Батунер Л.П. Математические методы в химической технике / Л.П. Батунер, М.Е. Позин. – Л.: Химия, 1968. – 823 с.

*Стаття надійшла до редакції 27.12.2016*