

УДК 519.21

Н.В. КРУГЛОВА*, О.О. ДИХОВИЧНИЙ*, І.В. АЛЕКСЄЄВА*, Н.В. БОГДАНОВА*

ПРО РОЗПОДІЛ МАКСИМУМУ ПОЛЯ ЧЕНЦОВА НА «СХОДИНКАХ»

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

Анотація. У статті узагальнено результати, отримані у роботах Параньяна, Парка, Клесова, Круглової. Зокрема, знайдено точний розподіл максимуму поля Ченцова (Brownian sheet в англомовній літературі) на одиничному квадраті, яке звужується на певну ламану. Необхідність розгляду таких задач пов'язана з задачами перколяції (протікання) та фільтрації. Як наслідки досліджено розподіли супремуму на межі квадрата, а також на східчастій лінії. Знайдені розподіли співпадають із розподілами, одержаними у роботах Парка і Параньяна. Особливістю ламаних, на яких вивчається розподіл звуження поля Ченцова, є спеціальне чергування горизонтальних і вертикальних ланок. Точний розподіл для звуження поля Ченцова на такі ламані у попередніх роботах намагались одержати шляхом граничного переходу в n -кратних інтегралах. Такий граничний перехід потребує додаткового обґрунтування. Запропонований у роботі метод параметризації ламаних вирішує проблему граничного переходу, але точні розподіли визначаються через досить «громіздкі» інтеграли, навіть наближена оцінка значень яких є проблемною. Як засіб розв'язання цієї проблеми запропоновано комп'ютерне моделювання траєкторії випадкового процесу, який є відповідним звуженням поля на лінії. Для моделювання було застосовано алгоритм, запропонований Кругловою і Диховичним. Цей алгоритм має високу швидкість, потреба в якій зумовлена великою кількістю точок розбиття траєкторії процесу. Підбір розподілу супремуму здійснено засобами мови статистичного програмування R. Як найбільш прийнятний розподіл обрано розподіл Вейбулла, що підтверджено критерієм Колмогорова, а також Q-Q та P-P діаграмами.

Ключові слова: поле Ченцова, випадкове поле, перколяція, гаусівський процес, розподіл максимуму, моделювання, мова R.

Аннотация. В статье обобщены результаты, полученные в работах Параньяна, Парка, Клесова, Кругловой. В частности, найдено точное распределение максимума поля Ченцова (Brownian sheet в англоязычной литературе) на единичном квадрате, которое сужается на определенную ломаную. Необходимость рассмотрения таких задач связана с задачами перколяции (протекания) и фильтрации. Как последствия исследованы распределения супремуму на грани квадрата, а также на ступенчатой линии. Найденные распределения совпадают с распределениями, полученными в работах Парка и Параньяна. Особенностью ломаных, на которых изучается распределение сужения поля Ченцова, есть специальное чередование горизонтальных и вертикальных звеньев. Точное распределение для сужения поля Ченцова на такие ломаные в предыдущих работах пытались получить путем предельного перехода в кратный интеграл. Такой предельный переход требует дополнительного обоснования. Предложенный в работе метод параметризации ломаных решает проблему предельного перехода, но точные распределения определяются через достаточно «громоздкие» интегралы, даже приближенная оценка значений которых является проблемной. Как средство решения этой проблемы предложено компьютерное моделирование траектории случайного процесса, который является подходящим сужением поля на линии. Для моделирования был использован алгоритм, предложенный Кругловой и Дыховичным. Этот алгоритм имеет высокое быстродействие, необходимость в которой обусловлена большим количеством точек разбиения траектории процесса. Подбор распределения супремуму осуществлен средствами языка статистического программирования R. Как наиболее приемлемое распределение избрано распределение Вейбулла, что подтверждено критерием Колмогорова, а также Q-Q и P-P диаграммами.

Ключевые слова: поле Ченцова, случайное поле, перколяция, гауссовский процесс, распределение максимуму, моделирование, речь R.

Abstract. The paper generalized results that presented in the works of following authors: Paranjape, Park, Klesov, Kruglova. Presise maximum distribution educted in particular of Browian sheet on unit square that straiten on certain polygones. Trial nesessity of certain tasks regarding to percolation and filtration tasks. Supremum distributions researched on square border as well as on stepped line. The distributions found coincide with the distributions obtained in the works of Park and Paranjape. The peculiarity of the polygons on which the distribution of the Chentsov field is studied is the special alternation of horizontal and vertical links. The exact distribution for the narrowing of the Chentsov field to such polynomials in previous works was attempted by obtaining the boundary transition in multiple integrals. Such a boundary transition requires additional justification. The suggested method of polygons parameterization solves the problem of boundary transition, but the exact distributions are determined by rather complicated integrals, even approximate estimates of which are problematic. Computer simulation of a random process trajectory is proposed as a means of solving this problem, which is a corresponding narrowing of the field on the line. The algorithm proposed by Kruglova and Dykhovichny was used for modeling. This algorithm has a high speed, the need for which is caused by a large number of breakpoints of the process trajectory. Selection of the maximum distribution is made using the statistical programming language R. The most acceptable distribution is the Weibull distribution, which is confirmed by the Kolmogorov criterion, as well as Q-Q and P-P diagrams.

Keywords: Chentsov field, Brownian sheet, random field, percolation, Gaussian process, distribution of the maximum, simulation, R language.

DOI: 10.34121/1028-9763-2020-1-128-139

1. Вступ

Серед задач статистики випадкових полів значне місце займає задача знаходження ймовірнісного розподілу максимуму випадкового поля на певних підмножинах меншої вимірності. Для поля Ченцова актуальною є задача знаходження розподілу максимуму по східчастих ламаних. Виникнення цієї задачі пов'язано з розв'язанням задач перколяції (фізичне явище протікання рідини або газу через пористе середовище) [1].

2. Постановка проблеми

Нас цікавитиме задача знаходження розподілу звуження двопараметричного поля Ченцова X на ламані спеціального вигляду. Означення цього поля у термінах щільності розподілу поля X належить Ченцову (1955 р.). Скористаємося еквівалентним означенням Йєха [2].

Означення. Полем Ченцова (двопараметричним броунівським листом) називається дійсне сепарабельне гаусівське поле $\{X(\vec{s}) : \vec{s} = (s_1, s_2) \in [0, 1]^2\}$, яке задовольняє умови:

1. $X(\vec{s}) = 0$ для всіх $\vec{s} : s_1 \cdot s_2 = 0, \vec{s} \in [0, 1]^2$.
2. $E[X(\vec{s})] = 0$ для всіх $\vec{s} \in [0, 1]^2$.
3. $E[X(\vec{s})X(\vec{t})] = \min\{s_1, t_1\} \min\{s_2, t_2\}$ для всіх $\vec{s} = (s_1, s_2), \vec{t} = (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$.

У загальному випадку задача знаходження розподілу максимуму поля Ченцова на одиничному квадраті не розв'язана. Як частинний випадок точний розподіл максимуму $X(\vec{s})$ на ламаній з однією вершиною було знайдено Параньяпом і Парком [3, 4]. Отже, цей результат.

Нехай ламана L з однією вершиною (рис. 1) задається рівнянням

$$L = \left\{ \vec{s} : s_2 = 1 - \frac{s_1}{a_1}, s_1 \leq s_0; s_2 = a_2 - a_2 s_1, s_1 > s_0, \vec{s} \in [0, 1]^2 \right\}, \quad (1)$$

де $\operatorname{tg} \alpha = x_1(1 - y_1)^{-1} = a_1, \operatorname{tg} \beta = y_1(1 - x_1)^{-1} = a_2, s_0 = \frac{a_1 a_2 - a_1}{a_1 a_2 - 1}, 45^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$.

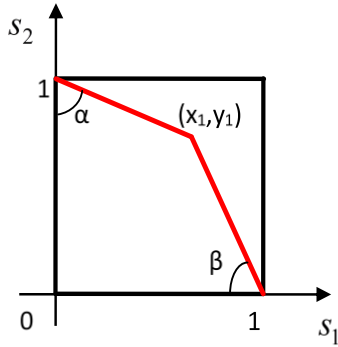


Рисунок 1 – Ламана з однією вершиною

Теорема 1. (Параньяп, Парк) Нехай ламана L задається (1).

Нехай $\{X(\vec{s}) : \vec{s} \in [0,1]^2\}$ – поле Ченцова. Тоді

$$P\left\{\sup_{\vec{s} \in L} X(\vec{s}) \leq x\right\} = \Phi\left(\frac{x(a_1 + a_3)}{a_1\sqrt{a_3}}\right) - \exp\left\{\frac{-2x^2}{a_1}\right\} \Phi\left(\frac{x(a_3 - a_1)}{a_1\sqrt{a_3}}\right) - \exp\left\{\frac{-2x^2}{a_2}\right\} \Phi\left(\frac{x(1 - a_2 a_3)}{a_2\sqrt{a_3}}\right) + \exp\{-2x^2(a_1^{-1} + a_2^{-1} - 2)\} \times \Phi\{x a_3^{-1/2}(a_2^{-1} - a_3 - 2)\},$$

$$\text{де } a_3 = \frac{a_1(a_2 - 1)}{a_2(a_1 - 1)}, \quad x > 0.$$

Розподіл максимуму поля Ченцова на межі квадрата було знайдено Парком і Параньяпом [4] шляхом граничного переходу.

Теорема 2.

$$P\left\{\sup_{\vec{s} \in \partial D} X(\vec{s}) < x\right\} = \Phi(x) - 2\Phi(-x) + e^{4x^2} \Phi(-3x),$$

де ∂D – межа квадрата $[0,1]^2$.

Узагальнення цих результатів було зроблено Клесовим і Кругловою у роботах [5–7], де знайдено точний розподіл максимуму поля Ченцова по ламаних з n вершинами (рис. 2).

Позначимо

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1, \quad (2)$$

$$1 = y_0 \geq y_1 \geq \dots \geq y_n \geq y_{n+1} = 0. \quad (3)$$

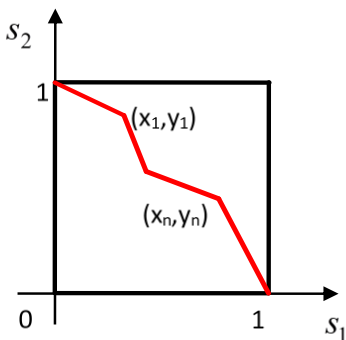


Рисунок 2 – Ламана з n вершинами

Теорема 3. Нехай $\{X(\vec{s}) : \vec{s} \in [0,1]^2\}$ – це поле Ченцова на одиничному квадраті. Нехай $u_0 = 0$. Нехай ламана L має n вершин Q_1, \dots, Q_n з координатами

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ відповідно. Нехай координати цих точок задовольняють умови (4)–(5).

Позначимо $z_0 = 0, z_i = \frac{x_i}{y_i}, i = \overline{1, n}$. Тоді для $x > 0$

$$P\left\{\sup_{\vec{s} \in L} X(\vec{s}) < x\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{x}{y_1}} \dots \int_{-\infty}^{\frac{x}{y_n}} \left(1 - \exp\left\{-2x\left(\frac{x}{y_n} - u_n\right)\right\}\right) \times \prod_{i=1}^n \left(1 - \exp\left\{-\frac{2\left(\frac{x}{y_{i-1}} - u_{i-1}\right)\left(\frac{x}{y_i} - u_i\right)}{(z_i - z_{i-1})}\right\}\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \varphi_{0, z_i - z_{i-1}}(u_i - u_{i-1}) du_1 \dots du_n,$$

де $\varphi_{0,z}(u) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2z}}}{\sqrt{2\pi z}}$ – щільність гаусівського розподілу з параметрами 0 та z .

3. Результати досліджень

Особливу увагу складають «східчасті» ламані, тобто такі, які містять горизонтальні й вертикальні сегменти. Проте, отримані теореми не дають можливості знаходити максимум поля Ченцова на «східчастій» лінії. Узагальнимо результати теореми 3, розглянувши «східчасті» ламані з n вершинами. Змінимо умови (2), (3) про координати вершин на такі умови:

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} = 1, \quad (4)$$

$$1 = y_0 \geq y_1 \geq \dots \geq y_n \geq y_{n+1} = 0, \quad (5)$$

разом з цим додавши таку умову для $z_i, i = \overline{0, n}$, означених у теоремі 3:

$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_n < \infty, \quad (6)$$

Нехай ламана L має n вершин Q_1, \dots, Q_n з координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ відповідно і задається рівнянням

$$L = \left\{ \vec{s} = (s_1, s_2) : s_1 = \sum_{i=0}^n f(a_i, b_i, u) I_{\Omega_i}(u), s_2 = \sum_{i=0}^n f(c_i, d_i, u) I_{\Omega_i}(u) \right\}, \quad (7)$$

де $f(a, b, u) = au + b$,

$$a_i = \sqrt{2} \Delta x_{i+1} (\Delta x_{i+1} - \Delta y_{i+1})^{-1}, \quad b_i = (-\Delta x_{i+1} + y_{i+1} y_i \Delta z_{i+1}) (\Delta x_{i+1} - \Delta y_{i+1})^{-1},$$

$$\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_{i+1} = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta z_{i+1} = z_{i+1} - z_i,$$

$$c_i = \sqrt{2} \Delta y_{i+1} (\Delta x_{i+1} - \Delta y_{i+1})^{-1}, \quad d_i = (-\Delta y_{i+1} + y_{i+1} y_i \Delta z_{i+1}) (\Delta x_{i+1} - \Delta y_{i+1})^{-1},$$

$$\Omega_i = [(1 + x_i - y_i) 2^{-1/2}, (1 + x_{i+1} - y_{i+1}) 2^{-1/2}), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Наведемо спочатку кілька допоміжних результатів.

Лема 1. Кореляційна функція звуження $X_L(s)$ поля Ченцова $X(\vec{s})$ на ламану L дорівнює

$$E[X_L(s_1) X_L(s_2)] = f(a_i, s_1, b_i) f(c_j, s_2, d_j) I_{\Omega_i}(s_1) I_{\Omega_j}(s_2), \quad i, j = \overline{0, n}, 0 < s_1 \leq s_2 \leq \sqrt{2}.$$

Лема 2. Функція $a(s) = \sum_{i=0}^n \frac{f(a_i, s, b_i)}{f(c_i, s, d_i)} I_{\Omega_i}(s), s \in (0, \sqrt{2})$, є неперервною і монотонно зростаючою.

Лема 3. Для $a(s)$ оберненою буде функція

$$a^{-1}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(d_i, s, -b_i)}{f(-c_i, s, a_i)} I_{[z_i, z_{i+1})}(s) + \frac{2sy_n - x_n + 1 - y_n}{2sy_n + \sqrt{2}(1 - x_n)} I_{[z_n, \infty)}(s), \quad s \in [0, \sqrt{2}),$$

де $z_i = x_i y_i^{-1}, i = \overline{0, n}$.

Лема 4. Нехай $v(s) = \sum_{i=0}^n f(c_i, s, d_i) I_{\Omega_i}(s)$, а $a^{-1}(s)$ визначена в лемі 3. Тоді

$$\frac{1}{v(a^{-1}(s))} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{s(y_{i-1} - y_i) + x_i - x_{i-1}}{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i} \right) I_{[z_{i-1}, z_i)}(s) + \left(s + \frac{1 - x_n}{y_n} \right) I_{[z_n, \infty)}(s),$$

де $z_i = x_i y_i^{-1}, i = \overline{0, n}$.

Доведення лем 1–4 повністю повторює доведення відповідних лем у [7], тому в даній роботі ми їх наводити не будемо.

Теорема 4. Нехай $\{X(\vec{s}) : \vec{s} \in [0, 1]^2\}$ – це поле Ченцова на одиничному квадраті. Нехай ламана L має n вершин Q_1, \dots, Q_n з координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ відповідно і задається рівнянням (7). Нехай координати цих точок задовольняють умови (4) – (6). Позначимо $z_i = x_i y_i^{-1}, i = \overline{0, n}$. Нехай $u_0 = 0$. Тоді для будь-якого $x > 0$

$$P \left\{ \sup_{\vec{s} \in L} X(\vec{s}) < x \right\} = \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x (1 - e^{-2x^2 y_n^{-1} + 2xu_n}) \times \\ \times \prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{2(xy_{i-1}^{-1} - u_{i-1})(xy_i^{-1} - u_i)}{\Delta z_i}} \right) \varphi_{0, \Delta z_i}(\Delta u_i) du_1 \dots du_n,$$

де $\varphi_{0, z}(u) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2z}}}{\sqrt{2\pi z}}$ – щільність гаусівського розподілу з параметрами 0 та z .

Доведення. Нехай процес $X_L(s)$ визначено в лемі 1, функцію $a^{-1}(s)$ – в лемі 3, а функцію $\frac{1}{v(a^{-1}(s))}$ визначено в лемі 4. Тоді маємо

$$P_n(x) \stackrel{def}{=} P \left\{ \sup_{\vec{s} \in L} X(\vec{s}) < x \right\} = \\ = P \left\{ \sup_{s \in [0, \sqrt{2}]} \sum_{i=0}^n X f(a_i, s, b_i); f(c_i, s, d_i) I_{\Omega_i}(s) < x \right\} = \\ = P \left\{ \sup_{s \in [0, \sqrt{2}]} X_L(s) < x \right\} = P \left\{ \sup_{s \in [0, \infty)} X_L(a^{-1}(s)) < x \right\}.$$

Оскільки $X(a^{-1}(0), v(a^{-1}(0))) = X(0, 1) = 0$, то

$$P_n(x) = P \left\{ \sup_{s \in (0, \infty)} X_L(a^{-1}(s)) < x \right\}.$$

Функція $v(s) > 0$ для $s > 0$, тому

$$P_n(x) = P \left\{ \sup_{s \in (0, \infty)} \left(\frac{X_L(a^{-1}(s))}{v(a^{-1}(s))} - \frac{x}{v(a^{-1}(s))} \right) < 0 \right\}.$$

Використавши перетворення Дуба, отримаємо

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P \left\{ \sup_{s \in (0, \infty)} (w(s) - x/v(a^{-1}(s))) < 0 \right\} = \\ &= P \{ w(s) < x \Delta x_i (x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)^{-1} - x \Delta y_i (x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)^{-1}, s \in (z_{i-1}; z_i], i = \overline{1, n}, \\ &\quad w(s) < x(1 - x_n) / y_n + xs; s > z_n \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P \left\{ \sup_{\vec{s} \in L} X(\vec{s}) < x \right\} = \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_n} (1 - e^{-2x^2 y_n^{-1} + 2x u_n}) \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{2(xy_{i-1}^{-1} - u_{i-1})(xy_i^{-1} - u_i)}{\Delta z_i}} \right) \varphi_{0, \Delta z_i}(\Delta u_i) du_1 \dots du_n. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Розгляньмо деякі наслідки теореми 4.

Наслідок 1. Розподіл максимуму поля Ченцова по межі квадрата.

У цьому випадку $n = 1$, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$. А звуження поля Ченцова на ламану L буде мати такий вигляд:

$$X_L(u) = X(\sqrt{2}u, 1) I_{\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(u) + X(1, 2 - \sqrt{2}u) I_{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)}(u), \quad u \in [0, \sqrt{2}). \quad (8)$$

Тоді функція $a(s)$ буде такою:

$$a(s) = \sqrt{2}s I_{\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(s) + \frac{1}{2 - \sqrt{2}s} I_{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)}(s), \quad s \in [0, \sqrt{2}). \quad (9)$$

Знайдемо обернену до неї функцію

$$a^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} I_{[0,1)}(s) + \frac{2 - s^{-1}}{\sqrt{2}} I_{[0,\infty)}(s). \quad (10)$$

Далі

$$v(a^{-1}(s)) = I_{[0,1)}(s) + s^{-1} I_{[0,\infty)}(s). \quad (11)$$

Отже, отримаємо, що

$$P \left\{ \sup_{\vec{s} \in \partial D} X(\vec{s}) < x \right\} = P \{ w(s) < x, s \in [0, 1], w(s) < sx, s > 1 \} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \left(e^{-\frac{u^2}{4}} - e^{-\frac{u^2}{4} - 2x^2 + 2ux} \right)^2 du =$$

$$= \Phi(x) + \Phi(-3x)e^{4x^2} - 2\Phi(-x).$$

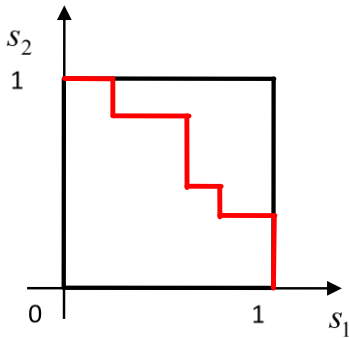


Рисунок 3 – «Східчаста» ламана

Що повністю співпадає з результатом, отриманим Парком і Параньяпом [4].

Тепер розглянемо ламану з довільною, непарною кількістю вершин n (рис. 3). Для неї характерно те, що

$$y_{2i} = y_{2i+1}, \quad x_{2i+1} = x_{2i+2}, \quad i = \overline{0, (n-1)/2}. \quad (12)$$

Наслідок 2. Нехай $\{X(\vec{s}) : \vec{s} \in [0,1]^2\}$ – це поле Ченцова на одиничному квадраті. Нехай ламана L_1 має n вершин Q_1, \dots, Q_n з координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ відповідно. Нехай координати цих точок задовольняють умови (12). Нехай $u_0 = 0$. Тоді для будь-якого $x > 0$

$$P_n(\lambda) = P \left\{ \sup_{\vec{s} \in L} X(\vec{s}) < x \right\} = \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x \left(1 - \exp \left\{ -2x \left(\frac{x}{y_n} - u_n \right) \right\} \right) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{n-3} \left(\left(1 - \exp \left\{ -\frac{2(xy_{2i+1}^{-1} - u_{2i+1})(xy_{2i+2}^{-1} - u_{2i+2})}{\Delta z_{2i+2}} \right\} \right) \varphi_{0, \Delta z_{2i+2}}(\Delta u_{2i+2}) \right) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{n-1} \left(\left(1 - \exp \left\{ -\frac{2(x - u_{2i}y_{2i})(xy_{2i}^{-1} - u_{2i+1})}{\Delta x_{2i+1}} \right\} \right) \varphi_{0, y_{2i}^{-1} \Delta x_{2i+1}}(\Delta u_{2i+1}) \right) du_1 \dots du_n,$$

де $\varphi_{0,z} u = \frac{e^{-\frac{u^2}{2z}}}{\sqrt{2\pi z}}$ — щільність гаусівського розподілу з параметрами 0 та z .

Доведення. Підставивши співвідношення 12 у теорему 4, отримаємо необхідне твердження.

4. Моделювання результатів

Розглянемо приклад застосування Теорема 4 та підбір прийняттого ймовірнісного розподілу.

Приклад 1. Розглянемо ламану з трьома вершинами, що мають координати $Q_1\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $Q_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $Q_3\left(1; \frac{1}{2}\right)$, яка починається з $(0,1)$ і закінчується точкою $(1,0)$ (рис. 4).

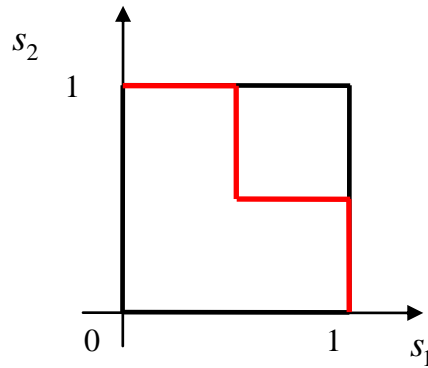


Рисунок 4 – Ламана з трьома вершинами

Введемо параметризацію таку ж, як і в теоремі 4. Ламана задається рівнянням

$$L = \{ \vec{s} : s_1 = 2^{1/2} u I_{[0,2^{-3/2}]}(u) + 0.5 I_{[2^{-3/2}, 2^{-1/2}]}(u) + (2^{1/2} u - 0.5) I_{[2^{-1/2}, 3 \cdot 2^{-3/2}]}(u) + I_{[3 \cdot 2^{-3/2}, 2^{1/2}]}(u), \\ s_2 = I_{[0,2^{-3/2}]}(u) + (-2^{1/2} u + 1.5) I_{[2^{-3/2}, 2^{-1/2}]}(u) + 0.5 I_{[2^{-1/2}, 3 \cdot 2^{-3/2}]}(u) + (2^{1/2} u - 2) I_{[3 \cdot 2^{-3/2}, 2^{1/2}]}(u) \}, u \in [0, 2^{1/2}]. \quad (13)$$

За теоремою 4,

$$P \left\{ \sup_{\vec{s} \in L} X(\vec{s}) < x \right\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{2x} \int_{-\infty}^{2x} (1 - \exp\{-4x(x - u_1)\}) \times \\ \times (1 - \exp\{-4(x - u_1)(2x - u_2)\}) (1 - \exp\{-2x(2x - u_3)\}) \times \\ \times (1 - \exp\{-(-4x + 2u_2)(2x - u_3)\}) \varphi_{0,0.5}(u_1) \varphi_{0,0.5}(u_2 - u_1) \varphi_{0,1}(u_3 - u_2) du_1 du_2 du_3.$$

Безпосереднє обчислення останнього інтегралу є достатньо складною процедурою. Тому застосуємо інший підхід.

Змоделюємо процес $X_L(u), u \in [0, \sqrt{2}]$ – звуження поля Ченцова на вищезгадану ламану і знайдемо емпіричний розподіл $P_3(\lambda) = P \left\{ \max_{s,t \in L} X(s;t) < \lambda \right\}$. Для моделювання скористаємось алгоритмом, описаним у [8, 9], в силу його високої швидкодії.

Звуження поля на ламану задається таким чином:

$$X_L(u) = X(2^{1/2} u, 1) I_{[0,2^{-3/2}]}(u) + X(0.5, -2^{1/2} u + 1.5) I_{[2^{-3/2}, 2^{-1/2}]}(u) + \\ + X(2^{1/2} u - 0.5, 0.5) I_{[2^{-1/2}, 3 \cdot 2^{-3/2}]}(u) + X(1, -2^{1/2} u + 2) I_{[3 \cdot 2^{-3/2}, 2^{1/2}]}(u), \quad u \in [0, \sqrt{2}].$$

За теоремою Дуба [10] ці два процеси є стохастично еквівалентними

$$X_L \square w(2^{0.5} u) I_{[0,2^{-1.5}]}(u) + (-2^{0.5} u + 1.5) w((3 - 2^{1.5} u)^{-1}) I_{[2^{-1.5}, 2^{-0.5}]}(u) + \\ + 0.5 w(2^{1.5} u - 1) I_{[2^{-0.5}, 3 \cdot 2^{-1.5}]}(u) + (-2^{0.5} u + 2) w((-2^{0.5} u + 2)^{-1}) I_{[3 \cdot 2^{-1.5}, 2^{0.5}]}(u), \quad u \in [0, 2^{0.5}].$$

Означимо вузлові точки $u_i = \frac{i}{2\sqrt{2}}, i = 1; 2; 3; 4$, а також функції

$$a(s) = s\sqrt{2} I_{[0,u_1]}(s) + (3 - 2\sqrt{2}s)^{-1} I_{[u_1,u_2]}(s) + (-1 + 2\sqrt{2}s) I_{[u_2,u_3]}(s) + (2 - \sqrt{2}s)^{-1} I_{[u_3,u_4]}(s), \\ v(s) = I_{[0,u_1]}(s) + (1.5 - \sqrt{2}s) I_{[u_1,u_2]}(s) + 0.5 I_{[u_2,u_3]}(s) + (-\sqrt{2}s + 2) I_{[u_3,u_4]}(s),$$

$$s \in [0, \sqrt{2}).$$

Нехай $t_k = \frac{k}{n}, k = \overline{0, n}$.

$$\Delta a(t_k) = a(t_k) - a(t_{k-1}), k = \overline{0, n}.$$

Задаємо змодельований процес таким чином:

$$\hat{Y}(0) = v(0)\xi_0\sqrt{a(0)},$$

$$\hat{Y}(t_i) = v(t_i)\sum_{k=1}^i\sqrt{\Delta a(t_k)}\xi_k, i = \overline{0, n},$$

$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ – стандартні, незалежні гаусові величини.

Наведемо фрагмент коду в середовищі R [11]. У ньому моделюються 10^4 копій траєкторій процесу $X_L(u)$ з розбиттям відрізка $[0, \sqrt{2}]$ на 1000 точок. Для кожної траєкторії обчислимо максимум, які формують вибірку з максимумів, а далі підбирається розподіл вибірки.

```
library(fitdistrplus)
fit.1 <- fitdist(data = vect, "norm", method = "mme")
ks.test(unique(vect), "pnorm", mean=fit.1$estimate[1], sd= fit.1$estimate[2])
print(fit.1)
plot(fit.1)
fit.2<- fitdist(data = vect, "gamma", method = "mme")
ks.test(unique(vect), "pgamma", shape=fit.2$estimate[1], rate=fit.2$estimate[2])
print(fit.2)
plot(fit.2)
fit.3<- fitdist(data = vect, "exp", method = "mme")
ks.test(unique(vect), "pexp", rate=fit.3$estimate[1])
print(fit.3)
plot(fit.3)
fit.4 <- fitdist(data = vect, "logis", method = "mme")
ks.test(unique(vect), "plogis", location=fit.4$estimate[1], scale=fit.4$estimate[2])
print(fit.4)
plot(fit.4)
fit.5<- mledist(vect[vect>0], "weibull", lower = c(1, 1))
ks.test(unique(vect[vect>0]), "pweibull", shape=fit.5$estimate[1], scale=fit.5$estimate[2])
plotdist(vect[vect>0], "weibull", para=list(shape=fit.5$estimate[1],
scale=fit.5$estimate[2]))
```

Застосовуючи пакет fitdistrplus [11], для емпіричного закону розподілу підберемо прийнятний теоретичний розподіл. Зробимо це на основі побудови гістограми, емпіричної функції розподілу та з використанням Р-Р та Q-Q діаграм. Серед розподілів оберемо найбільш схожі: нормальний, експоненціальний, логнормальний, гама і Вейбулла.

Нормальний розподіл (рис. 5), очевидно, не підходить, що підтверджується графіками, діаграмами та тестом Колмогорова-Смирнова (p-value < 2.2e-16).

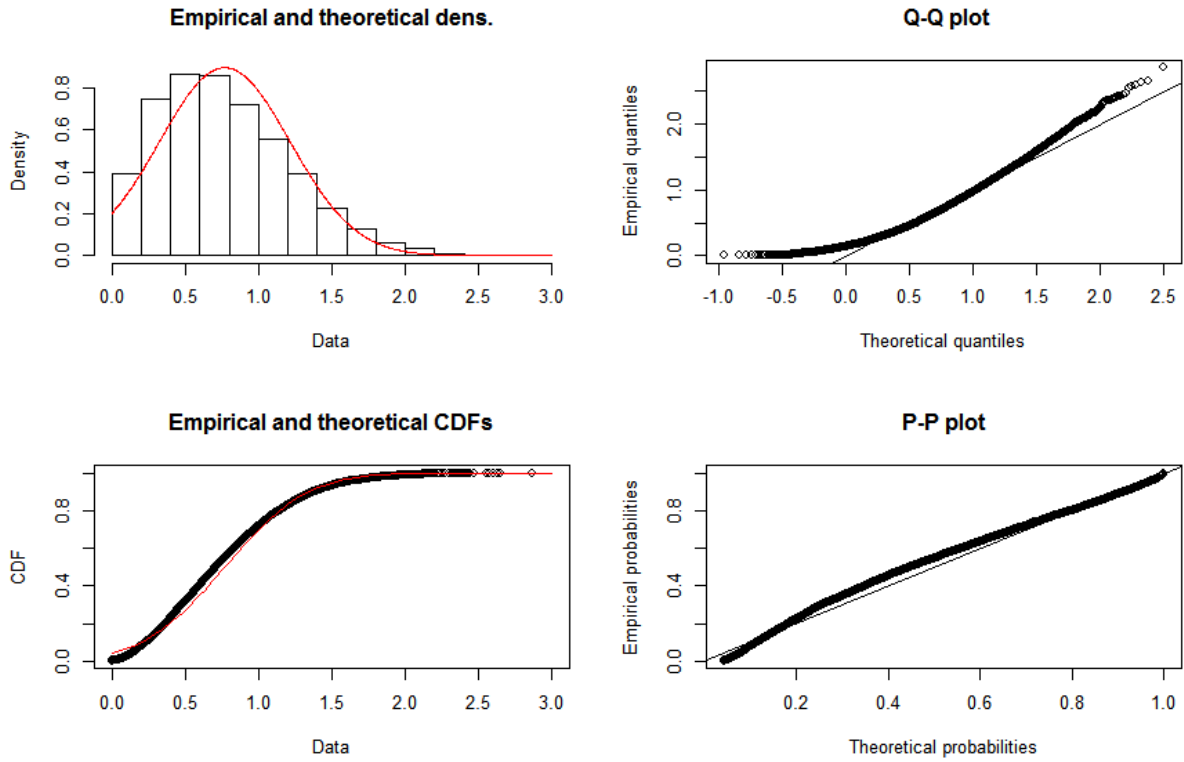


Рисунок 5 – Нормальний розподіл

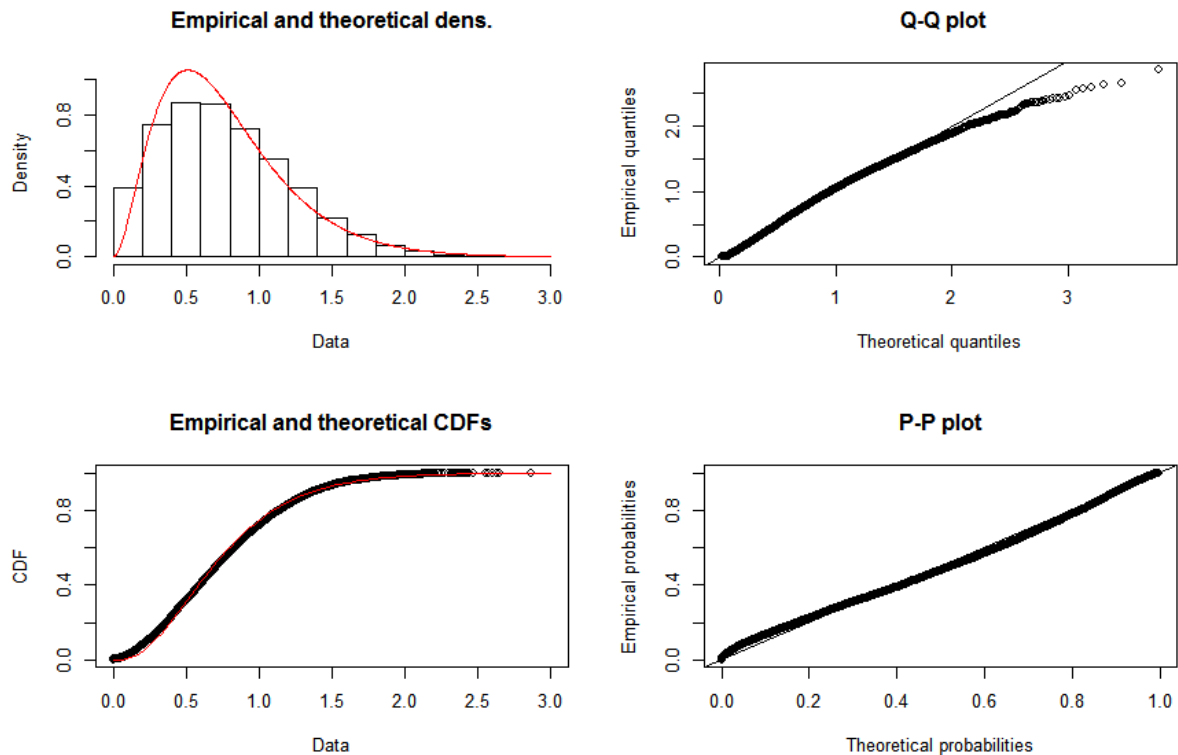


Рисунок 6 – Гамма-розподіл

Аналогічно неприйнятним є гамма-розподіл (рис. 6) ($p\text{-value} = 6,737e-11$). Також було відхилено експоненціальний, логнормальний розподіли.

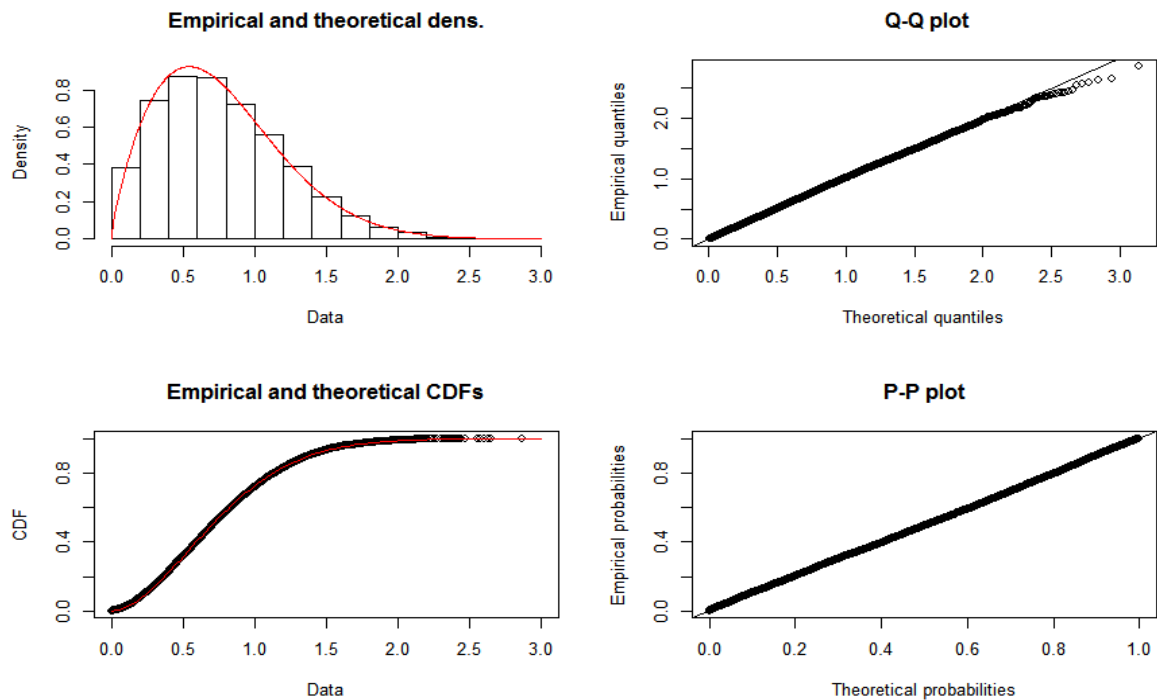


Рисунок 7 – Розподіл Вейбулла

Найбільш прийнятним, як видно з рис. 7 і тесту Колмогорова-Смирнова (p -value = 0,1027), виявився розподіл Вейбулла. Зауважимо, що це узгоджується з результатами, представленими в [12].

5. Висновки

1. В роботі суттєво розширено клас ламаних, на які вдається знайти точний розподіл супремуму поля Ченцова, та знайдено відповідний розподіл у вигляді інтегралів.
2. Запропоновано спосіб знаходження достатньо точного наближення для такого розподілу, яке допускає безпосереднє обчислення.
3. Проведено чисельне моделювання засобами мови R відповідного випадкового процесу й знайдено найприйнятніший теоретичний розподіл-розподіл Вейбулла.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Меньшиков М.В., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения. *Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика*. 1986. № 24. С. 53–110.
2. Yeh J. Wiener measure in a Space of Functions of Two Variables. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1960. N 95. P. 433–450.
3. Paranjape S.R., Park C. Distribution of the supremum of the two-parameter Yeh-Wiener process on the boundary. *Journal of Applied Probability*. 1973. Vol. 10, N 4. P. 875–880.
4. Park C., Schuurmann F.J. Evaluations of barrier-crossing probabilities of wiener paths. *J. Appl. Prob.* 1976. N 13. P. 267–275.
5. Kruglova N.V. Distribution of the maximum of the Chentsov random field. *Theory of Stochastic Processes*. 2008. N 1. P. 76–81.
6. Клесов І.І. Про ймовірність досягнення криволінійного рівня вінерівським полем. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. 1995. Вип. 51. С. 63–66.
7. Клесов О.І., Круглова Н.В. Розподіл функціоналів типу максимуму для поля Ченцова в R^3 . *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. 2007. № 6. С. 145–150.
8. Dykhovychnyi O.O, Kruglova N.V. Simulation of Gaussian process with correlation function of a

special form. *Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes*, dedicated to the 100-th anniversary of I.I. Gikhman: International Conference (Kyiv, 17–22 September 2018). Kyiv, Ukraine, 2018. P. 18–20.

9. Диховичний О.О., Круглова Н.В., Вирстюк О.І. Методи знаходження законів розподілів випадкових величин за даними статистичних вибірок засобами мови R. *Mathematics in Modern Technical University*. 2018. № 1. 91–100 .

10. Doob J.L. Heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems. *Ann. Math. Statist.* 1949. N 20. P. 393–403.

11. URL: <http://cran.us.r-project.org>.

12. Gnedenko B.V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une s'erie al'eatoire. *Ann. Math.* 1943. N 44. 423–453.

Стаття надійшла до редакції 21.02.2020