

УДК 519.61:621.3

В.П. ВОЛОБОЄВ*, В.П. КЛИМЕНКО*

МЕТОД ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ Й ПОГАНУ ОБУМОВЛЕНІ МАТРИЦІ

*Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ, Україна

Анотація. Розглянуто новий підхід до вирішення завдання нестійкості системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з погано обумовленою матрицею, яка описує дискретну модель інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, до якого зводиться опис методом вторинних джерел тривимірних статичних і квазістационарних електромагнітних полів будь-якої геометрії в неоднорідних і нелінійних середовищах. Суть нового підходу полягає в такому. Є спосіб коректного опису електричної схеми. Вперше при описі електричної схеми враховуються параметри конкретного завдання, чого немає в інших методах. У результаті є рішення задачі, стабільне навіть у разі СЛАР з погано обумовленою матрицею. Недоліком методу є опис електричної схеми у вигляді графа. Опис дискретної моделі інтегрального рівняння пропонується трансформувати до форми представлення, яке задовольняє вимогам опису електричної схеми. Для досягнення цієї мети були виконані такі завдання. Сформульовано вимоги методу коректного складання опису, якому повинна задовольняти форма опису дискретної моделі інтегрального рівняння. Проведено аналіз лінійної дискретної моделі інтегрального рівняння, побудовано граф дискретної моделі і сформульовані вимоги до методики трансформації цього графа до графа, що задовольняє вимогам методу. Розроблено методику перетворення графа дискретної моделі у граф, що задовольняє вимогам методу. Остаточний результат: представлено опис дискретної моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, складеної методом вторинних джерел у вигляді графа, який відповідає вимогам методу.

Ключові слова: погано обумовлена матриця, система лінійних алгебраїчних рівнянь, інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, метод вторинних джерел в електротехніці, коректне формулювання завдання, цілеспрямований вибір змінних. граф дискретної моделі інтегрального рівняння.

Аннотация. Рассмотрен новый подход к решению задачи неустойчивости системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плохо обусловленной матрицей, описывающей дискретную модель интегрального уравнения Фредгольма второго рода, к которому сводится расчет методом вторичных источников трехмерных статических и квазистационарных электромагнитных полей любой геометрии в неоднородных и нелинейных средах. Суть нового подхода в следующем. Есть метод корректного составления описания электрической цепи. В этом методе впервые при описании электрической цепи учитываются параметры конкретной задачи, чего нет в других методах. В результате этого решение задачи устойчиво даже в случае СЛАУ с плохо обусловленной матрицей. К недостатку этого метода следует отнести описание электрической цепи в виде графа. Предлагается описание дискретной модели интегрального уравнения преобразовать к форме представления, удовлетворяющего методу описания электрической цепи. Для достижения поставленной цели выполнены следующие задачи. Сформулированы требования метода корректного составления описания, которым должна удовлетворять форма представления описания дискретной модели интегрального уравнения. Проведен анализ линейной дискретной модели интегрального уравнения, построен граф дискретной модели и сформулированы требования к методике трансформации этого графа к графу, удовлетворяющему требованиям метода. Разработана методика преобразования графа дискретной модели в граф, удовлетворяющий требованиям метода. Окончательный результат: представлено описание дискретной модели интегрального уравнения Фредгольма второго рода, составленной методом вторичных источников в виде графа, удовлетворяющего требованиям метода.

Ключевые слова: плохо обусловленная матрица, система линейных алгебраических уравнений, интегральное уравнение Фредгольма второго рода, метод вторичных источников в электротехнике, корректная формулировка задачи, целенаправленный выбор переменных, граф дискретной модели интегрального уравнения.

Abstract. A new approach to solving the problem of instability of a system of linear algebraic equations (SLAE) with an ill-conditioned matrix describing a discrete model of the Fredholm integral equation of the second kind, which reduces the calculation by the method of secondary sources of three-dimensional static and quasi-stationary electromagnetic fields of any geometry in inhomogeneous and nonlinear media, is considered. The essence of the new approach is all about. There is a method for correctly compiling a description of an electrical circuit. In this method, for the first time, when describing an electrical circuit, the parameters of a specific task are taken into account, but they are not taking into account in other methods. As a result, the solution to the problem is stable even in the case of a SLAE with an ill-conditioned matrix. The disadvantage of this method is the description of the electrical circuit in the form of a graph. The description of the discrete model of the integral equation is proposed to be transformed to a form of representation that satisfies the method of describing the electric circuit. To achieve this goal, the following tasks have been completed. The requirements of the method of correct compilation of the description, which the form of the description of the discrete model of the integral equation must satisfy, are formulated. The analysis of the linear discrete model of the integral equation is carried out, the graph of the discrete model is constructed, and the requirements for the method of transforming this graph to the graph that meets the requirements of the method are formulated. A technique for transforming a graph of a discrete model into a graph that meets the requirements of the method has been developed. Final result: a description of a discrete model of the Fredholm integral equation of the second kind, compiled by the method of secondary sources in the form of a graph, satisfying the requirements of the method is presented.

Keywords: ill-conditioned matrix, system of linear algebraic equations, Fredholm integral equation of the second kind, method of secondary sources in electrical engineering science, correct formulation of the problem, purposeful choice of variables, graph of a discrete model of an integral equation.

DOI: 10.34121/1028-9763-2020-4-82-94

1. Вступ

У монографії [1] наведені теорія й обґрунтування методу вторинних джерел для розрахунку тривимірних статичних і квазістаціонарних електромагнітних полів будь-якої геометрії в неоднорідних і нелінійних середовищах. Такий підхід до розрахунку завдань приводить до рішення системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду відносно густини вторинних джерел.

Однак, як відзначає автор методу, при розрахунку методом вторинних джерел електромагнітного поля в конструкціях магнітних систем виникають істотні труднощі. Дослідження нової математичної моделі показали, що для багатьох практичних важливих завдань рішення інтегральних рівнянь нестійке. Рівняння некоректні в тому розумінні, що мала погрішність, допущена при обчисленні правої частини, може призвести до як завгодно великої погрішності вторинних джерел.

Слід виділити фактори, які можуть призвести до нестійкості рішення завдання:

- завдання не має фізичної реалізації;
- математична модель розв'язуваного завдання не відповідає фізичному завданню;
- погано обумовлена матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка описує дискретну модель завдання.

Надалі будуть розглянуті питання, пов'язані з одержанням стійкого рішення завдання у випадку, коли матриця СЛАР погано обумовлена. Існують два підходи до рішення СЛАР з погано обумовленою матрицею. У першому випадку вірогідність результату досягається за рахунок спеціально розроблювального методу рішення СЛАР з погано обумов-

леною матрицею, що враховує специфіку конкретного завдання. Варто помітити, що цей напрям досить повно розглянуто у науково-технічній літературі.

У статті [2] запропоновано новий підхід до рішення СЛАР з погано обумовленою матрицею, що описують фізичний об'єкт. Він заснований на тому, що, як показано у статті, причиною нестійкого рішення СЛАР з погано обумовленою матрицею, є некоректний вибір змінних при складанні опису дискретної моделі фізичного об'єкта. Там же наведені рекомендації з коректного вибору змінних. У [3] запропоновано метод складання лінійного опису фізичного об'єкта, в якому враховуються рекомендації, наведені в [2]. Розширення області застосовності методу розглянуто в [4, 5]. В [6] описана вхідна мова для моделювання мікроелектронних пристроїв програмою загального призначення. Слід зазначити, що метод застосовується тільки до певного класу фізичних об'єктів, а саме складання опису електричного ланцюга.

Розширення області застосовності методу наведено в роботах [7–9], у яких наведені методики перетворення дискретної моделі енергосистеми, стрижневої системи механіки й методу кінцевих елементів до виду, який задовольняє вимогам запропонованого методу.

Мета статті – розробити методику перетворення лінійної дискретної моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке складено методом вторинних джерел, до виду, який задовольняє вимогам методу складання опису дискретної моделі фізичного об'єкта з коректним вибором змінних.

2. Постановка завдання

Надалі замість назви «Метод складання СЛАР електричного ланцюга», який описано в [3], використовується визначення «Метод коректного складання опису лінійної дискретної моделі електричного ланцюга».

Нижче буде представлена методика перетворення лінійної дискретної моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке складено методом вторинних джерел, до виду, що задовольняє вимогам методу коректного складання опису.

Розробка методики складається з таких етапів. Спочатку формулюються вимоги методу коректного складання опису до форми подання дискретної моделі фізичного об'єкта.

На наступному етапі в результаті проведеного аналізу дискретної моделі інтегрального рівняння формулюються вимоги до методики перетворення лінійної моделі до виду, що задовольняє вимогам методу.

На заключному етапі приводиться методика перетворення лінійної дискретної моделі інтегрального рівняння до виду, що задовольняє сформульованим вимогам методу.

3. Вимоги методу коректного складання опису до подання дискретної моделі фізичного об'єкта

Насамперед, слід зазначити, що метод коректного складання опису фізичного об'єкта [3] розроблено тільки для складання опису електричних ланцюгів.

Суть методу полягає в такому. Спочатку складається еквівалентна схема заміщення електричного ланцюга у вигляді зв'язаного графа. При цьому передбачається, що еквівалентна схема заміщення містить тільки двополюсні компоненти, які у графі представлені як гілки.

Прийнято вважати, що через i -у компоненту (відповідно через i -у гілку) протікає струм I_i , а до вузлів i -ої компоненти (i -ої гілки) прикладено напругу V_i . Крім того, в умовній позначці гілки графа вказується інформація про тип двополюсника й напрямку руху струму компоненти. Тип двополюсника визначається з виду функціональної залежності між струмом і напругою (надалі у викладі буде фігурувати як компонентне рівняння) двополюсної компоненти.

Наступний набір типів двополюсних компонент і відповідно компонентних рівнянь застосовується для опису електричного ланцюга. Прийнято вважати i -у компоненту незалежним джерелом напруги E_i (рис. 1 а), якщо компонентне рівняння має вигляд

$$E_i = const . \quad (1)$$

Тип i -ої компоненти буде незалежне джерело струму J_i (рис. 1 б), якщо компонентне рівняння має вигляд

$$J_i = const . \quad (2)$$

Тип i -ої компоненти прийнято вважати провідністю G_i (рис. 1 в) у тому випадку, якщо зв'язок між струмом і напругою компоненти описується таким рівнянням:

$$I_i = G_i V_i . \quad (3)$$

Тип i -ої компоненти, яка описується рівнянням

$$J_i = k_i V_j , \quad (4)$$

є залежне від напруги V_j іншої компоненти джерело струму J_i (рис. 1 г). Коефіцієнт k_i вказує ступінь залежності J_i струму i -ої компоненти від напруги j -ої компоненти. Варто помітити, що напруга V_j іншої компоненти є, по-перше, зовнішній зв'язок для i -ої компоненти, по-друге, цей зв'язок не має графічного відображення. Зовнішній зв'язок показано на умовному зображенні (рис. 1 г).

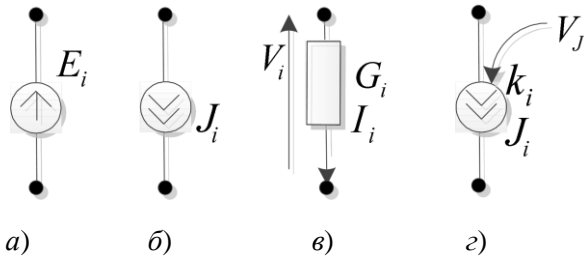


Рисунок 1 – Умовні позначки типів компонент електричного ланцюга

Побудова математичної моделі електричного ланцюга базується на основній системі рівнянь електричного ланцюга, куди входять рівняння, складені на основі законів Кирхгофа, і компонентні рівняння. Для опису графа електричного ланцюга й, відповідно, рівнянь на основі законів Кирхгофа застосовуються топологічні матриці контурів і перетинів. Матриця контурів графа складається в такий спосіб. Спочатку вибирається дерево графа еквівалентного електричного ланцюга. У дерево обов'язково включаються джерела напруги

E , а в хорди – джерела струму J . Цілеспрямований вибір змінних виконується при виборі в дерево компонент типу провідностей шляхом урахування параметрів компонентних рівнянь і особливостей топологічних матриць, властивих конкретному ланцюгу або класу ланцюгів. Конттури утворюються приєднанням хорд до дерева графа. Змінні, що становлять систему рівнянь, вибираються з напруг компонент гілок дерева. В остаточному підсумку, з основної системи рівнянь виділяється система рівнянь, що відповідає обраним змінним, і система рівнянь зв'язку, за допомогою яких обчислюються всі напруги й струми компонентів. Перетворена в такий спосіб основна система рівнянь розглядається як математична модель електричного ланцюга.

З вищенаведеного випливають такі вимоги методу коректного складання опису лінійного електричного ланцюга до дискретної моделі фізичного об'єкта.

Дискретна модель повинна бути представлена у вигляді графа. Граф задовольняє таким вимогам:

1. Граф містить двополюсні компоненти (гілки графа).
2. Двополюсні компоненти описуються компонентними рівняннями типу (1–4).
3. Граф не містить вузлів, що з'єднують компоненти типу джерела струму.
4. У дерево графа обов'язково включаються джерела напруги E , а в хорди джерела струму J .

5. Різноманітний вибір дерева повинен бути у графі. Від цього залежить реалізація цілеспрямованого вибору змінних при складанні опису дискретної моделі.

На наступному етапі розглядається аналіз дискретної моделі інтегрального рівняння на предмет відповідності вимогам методу коректного складання опису.

4. Аналіз дискретної моделі інтегрального рівняння

Побудова лінійної дискретної моделі інтегрального рівняння наведена в [1, стор. 100–102], тому нижче приведена необхідна інформація для аналізу дискретної моделі: інтегральне рівняння, до якого зводиться опис статичного і квазістационарного електромагнітного поля будь-якої геометрії в неоднорідному й нелінійному середовищі, дискретна модель рівняння й аналіз цієї моделі на предмет відповідності вимогам методу коректного складання опису.

Надалі обмежимося розглядом завдань, які описуються одним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду виду

$$\sigma(Q) + \frac{\lambda}{2\pi} \oint_S K(Q, M) \sigma(M) dS_M = f(Q), \quad (5)$$

де $K(Q, M) = \frac{r_{QM} n_Q}{r_{QM}^3} - \frac{1}{S} \oint_S \frac{r_{QM} n_Q}{r_{QM}^3} dS_M$ – ядро рівняння, $\sigma(Q)$ – невідома функція, $f(Q)$ – вільний член, λ – чисельний параметр. Фізичний зміст невідомої функції й вільного члена визначаються при розрахунку конкретного завдання, r_{QM} – вектор відстані між точкою Q , у якій визначається σ , і точкою M . n_Q – одиничний вектор нормалі до поверхні S у точці Q . Інтегрування виконується по замкнутій поверхні, площа якої дорівнює S .

Рішення рівняння (5) зводиться до розрахунку розподілу поверхневої щільності функції $\sigma(Q)$ залежно від вільного члена (потіку щільності) $f(Q)$ на замкнутій поверхні S .

При побудові дискретної моделі інтегрального рівняння (5) вся поверхня поділяється на малі ділянки ΔS із центрами в точках ($i=1, 2, \dots, n$), як показано на рис. 2.

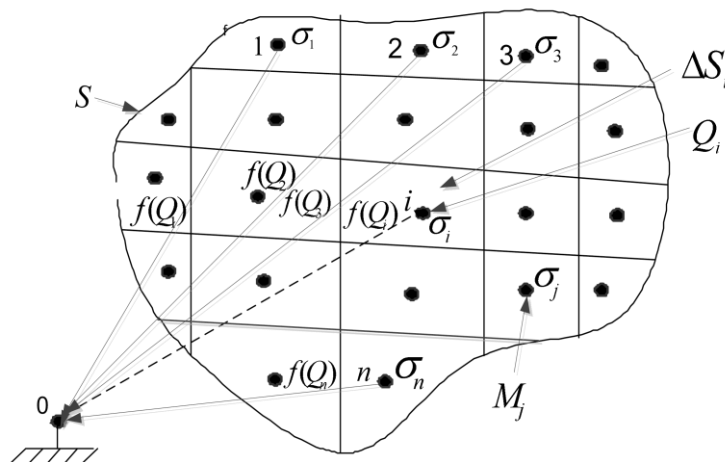


Рисунок 2 – Поверхня, розділена на малі ділянки

Припустивши, що функції $\sigma(M)$, $\sigma(Q)$ і $f(Q)$ на елементарних ділянках постійні й дорівнюють значенням $\sigma(Q_i)$ і $f(Q_i)$ в точці i , а $\sigma(M_j)$ в j , інтеграл, що входить у (5), замінюється кінцевою сумою інтегралів на ділянках ΔS_j і після відповідних перетворень рівняння (5) одержимо систему n -ого порядку такого виду:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \sigma_j = f_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

де $\sigma_j = \sigma(M_j)$ – компонент n -мірного вектора, $f_i = f(Q_i)$ – компонент n -мірного вектора f . Значення коефіцієнтів системи (6) обчислюються за формулами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda \Delta S_i}{2\pi S} \int_S \frac{\cos(r_{Q_i M}, n_{Q_i})}{r_{Q_i M}^2} dS_M; & i = j; \\ \frac{\lambda}{2\pi \Delta S_j} \left[\frac{\cos(r_{Q_i M}, n_{Q_i})}{r_{Q_i M}^2} - \frac{1}{S} \int_S \frac{\cos(r_{Q_i M}, n_{Q_i})}{r_{Q_i M}^2} dS_M \right] dS; & i \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

Як випливає з формул (7), матриця СЛАР (6), у загальному випадку, несиметрична. СЛАР (6) є лінійна дискретна модель інтегрального рівняння. Цій моделі відповідає граф, що складається з n підграфів (рис. 3 б), у яких безліч вузлів збігається з безліччю вузлів самого графа. Причому один вузол підграфа є загальний для всіх підграфів, і його номер нуль, а номер другого вузла збігається з номером n -ого рівняння.

На рис. 3 а прийняті такі позначення. Ребро, що з'єднує вузли 0 і i , є умовна позначка F_i -ого підграфа. F_i -ому підграфу відповідає i -е рівняння СЛАР (6), яке представлено у такому вигляді:

$$a_{ii} \sigma_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \sigma_j - f_i = 0. \quad (8)$$

Поверхнева щільність функції σ_i i -ого рівняння (8), за аналогією з напругою компоненти електричного ланцюга, прикладена до вузлів 0 і i підграфа, а щільності функцій $\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_n$, де $j=1, \dots, k, \dots, n$ і $j \neq i$, прикла-

дені до вузлів інших підграфів, і є зовнішні зв'язки для F_i -ого підграфа. Елемент $a_{ii} \sigma_i$ рівняння (8) відповідає правій частині компонентного рівняння (3) електричного ланцюга компоненти типу провідність і розглядається як компонента типу провідність графа підграфа. Їй відповідає компонентне рівняння

$$I_i = a_{ii} \sigma_i = G_i \sigma_i, \quad (9)$$

де a_{ii} відповідає провідності G_i електричного ланцюга, а I_i – за аналогією зі струмом компоненти електричного ланцюга є потік щільності функції. Умовне позначення компоненти наведено на рис. 1 в. В умовному позначенні компоненти зазначено тип компоненти, напрямку руху потоку.

Елемент $a_{ij} \sigma_j$ рівняння (8) відповідає правій частині компонентного рівняння (4) компоненти електричного ланцюга типу залежне джерело струму J_i від напруги V_j іншої

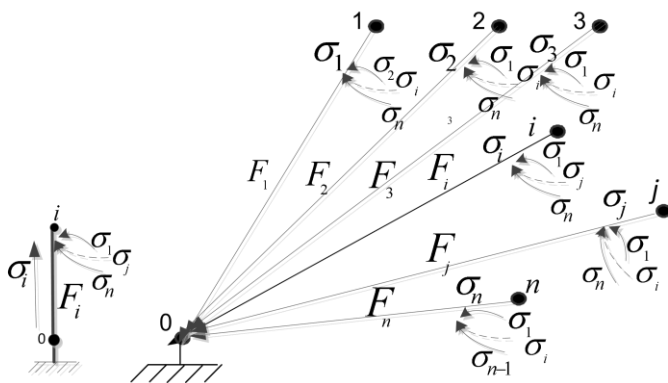


Рисунок 3 – Граф дискретної моделі: а) умовне позначення F_i -ого підграфа; б) граф дискретної моделі, що складається з n підграфів

компоненти. Поверхнева щільність функції σ_j в точці j F_j -ого підграфа є аналог напруги V_j іншої компоненти в рівнянні (4). Параметр a_{ij} є аналог коефіцієнта залежності $k_i J_i$ струму i -ої компоненти від V_j напруги j -ої компоненти. Компонентне рівняння залежного джерела потоку J_{ij} F_i -ого підграфа від щільності функції σ_j F_j -ого підграфа має вигляд

$$J_{ij} = a_{ij}\sigma_j = k_i\sigma_j. \quad (10)$$

Умовна позначка компоненти із вказівкою зовнішнього зв'язку наведена на рис. 1 з.

Елемент f_i рівняння (8) відповідає правій частині компонентного рівняння (2) компоненти електричного ланцюга типу незалежне джерело струму J_i . Компонентному рівнянню компоненти типу незалежне джерело потоку функції J_i F_i -ого підграфа відповідає вираження

$$J_i = f_i = const. \quad (11)$$

Умовна позначка компоненти наведена на рис. 1 б.

З огляду на вираження (9–11), рівняння (8) має такий вигляд:

$$I_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n J_{ij} - J_i = 0. \quad (12)$$

Побудова графа F_i -ого підграфа, що відповідає рівнянню (12), заснована на першому законі Кирхгофа. Він установлює співвідношення між струмами в розгалужених електричних ланцюгах довільного типу, що полягає в тому, що алгебраїчна сума струмів, які сходяться в будь-якому вузлі, дорівнює нулю. У цьому випадку рівняння (12) інтерпретується як алгебраїчна сума потоків поверхневої щільності функції компонент в i -ому вузлі F_i -ого підграфа. Граф F_i -ого підграфа, що задовольняє закону Кирхгофа й рівнянню (12), наведено на рис. 4 б.

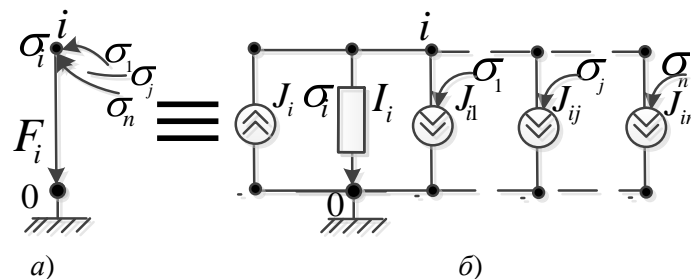


Рисунок 4 – Граф F_i -ого підграфа: а) умовна позначка F_i -ого підграфа; б) граф F_i -ого підграфа

Варто помітити, що у вузлах F_i -ого підграфа і вузлах графа дискретної моделі сходяться двополюсні компоненти типу незалежних і залежних джерел потоків поверхневої щільності функції й провідності, а компонентні рівняння відповідають рівнянням електричного ланцюга. Це означає, що граф дискретної моделі відповідає вимогам до графа, тому до нього є можливість застосувати весь інструментарій теорії електричних ланцюгів.

У F_i -ому підграфі (рис. 4 б) можливий вибір у дерево тільки однієї компоненти, а саме, провідності a_{ii} . Всі підграфи графа дискретної моделі з'єднані таким чином, що утворюють незв'язний граф (рис. 3 б), тобто, граф містить тільки гілки дерева. Це означає, що граф дискретної моделі не задовольняє вимозі методу коректного складання опису.

На наступному етапі із залученням інструментарію теорії електричних ланцюгів розглядається перетворення графа дискретної моделі інтегрального рівняння до виду, який відповідає вимогам методу коректного складання опису.

5. Методика перетворення незв'язного графа у графі з різноманітним вибором дерева

Перетворення незв'язного графа у граф із різноманітним вибором дерева виконується за кілька етапів. Насамперед, незв'язний граф перетворюється у зв'язний. В основі перетворення лежить перший закон Кирхгофа в такому формулюванні. Алгебраїчна сума струмів (потоків поверхневої щільності функції), що сходяться у вузлах i та j , дорівнює нулю навіть у тому випадку, якщо до вузлів i та j приєднана двополюсна компонента типу незалежне джерело струму (потоків функції) J_{ij}^c . Ця властивість виконується тільки в тому випадку, якщо незалежне джерело потоків функції $J_{ij}^c = 0$.

Перетворення виконується в такий спосіб. Для F_i -ого, де $i = 1, 2, \dots, n-1$, і кожного з F_j -их, де $j = i+1, \dots, n$, підграфів перевіряється наявність зовнішнього зв'язку в обох напрямках, тобто $|a_{ij}| > 0$ та $|a_{ji}| > 0$. Якщо такий зв'язок є, то до вузлів i та j приєднується двополюсна компонента типу незалежне джерело потоків функції $J_{ij}^c = 0$. Напрямок потоку функції в компоненті вказується від i -ого вузла до j -ого. Відсутність таких зовнішніх зв'язків між підграфами у графі дискретної моделі означає, що граф не перетворюється у зв'язний. На рис. 5 показано граф, який наведено на рис. 3 б, після такого перетворення. Там же штриховою лінією зазначені зв'язки з іншими підграфами. Як випливає з рис. 5, граф не задовольняє вимозі методу коректного складання опису, а саме, різноманітний вибір дерева. У графі можливий тільки один варіант вибору дерева тому, що джерела струму обов'язково включаються в хорди графа, як вимагає метод.

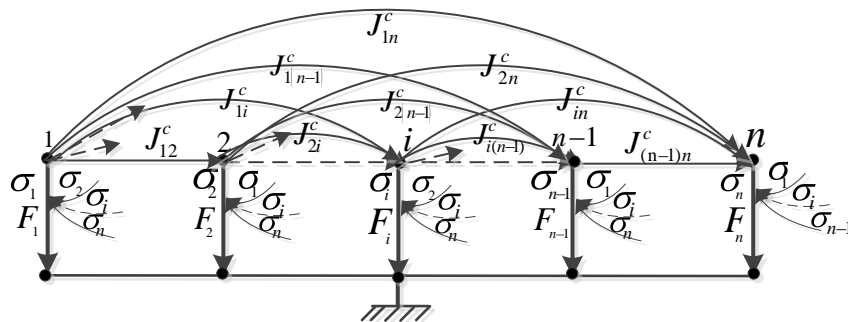


Рисунок 5 – Зв'язний граф дискретної моделі інтегрального рівняння

На наступному етапі виконується трансформація зв'язного графа у граф з різноманітним вибором дерева. Це можливо тільки в тому випадку, якщо гілки зв'язку підграфів містять компоненти типу провідність. Для виконання цього завдання залучається інструментарій теорії ланцюгів [10]. Так, зважаючи на те, що у граф F_i -ого підграфа входить $n-1$ компонента типу залежне джерело потоків, для трансформації графа дискретної моделі застосовується правило переносу джерел струму [10]: «Джерело струму може бути замінено джерелами струму, підключеними паралельно всім гілкам, що входять у контур із замінним джерелом. При такому перетворенні суми струмів у вузлах вихідного й перетвореного ланцюгів будуть однакові».

З алгоритму перетворення незв'язного графа у зв'язний випливає, що перенесення джерел струму досить розглянути тільки для регулярного елемента графа: F_i -ий підграф, з'єднаний гілкою зв'язку з кожним F_j -им, де $j = i+1, \dots, n$ підграфом. Трансформація регулярного елемента виконується в такий спосіб. У F_i -ому підграфі і кожному з F_j -их підграфів, де $j = i+1, \dots, n$, перевіряється, чи зв'язує компонента J_{ij}^c вузли i та j цих підграфів. Якщо така компонента є, то виконується перенесення джерел потоку в такий спосіб. До гілок контуру I_i, J_{ij}^c, I_j паралельно підключаються компонента J_{ij} F_i -ого підграфа й компонента J_{ji} F_j -ого підграфа (рис. 6). Напрямок потоку компонент, що підключаються, протилежний вихідному напрямку цих компонент.

На рис. 6 наведено регулярний елемент зв'язного графа після виконання паралельного підключення компоненти J_{ij} F_i -ого підграфа й компоненти J_{ji} F_j -ого підграфа, де $j = i+1, \dots, n$ до гілок контуру I_i, J_{ij}^c, I_j .

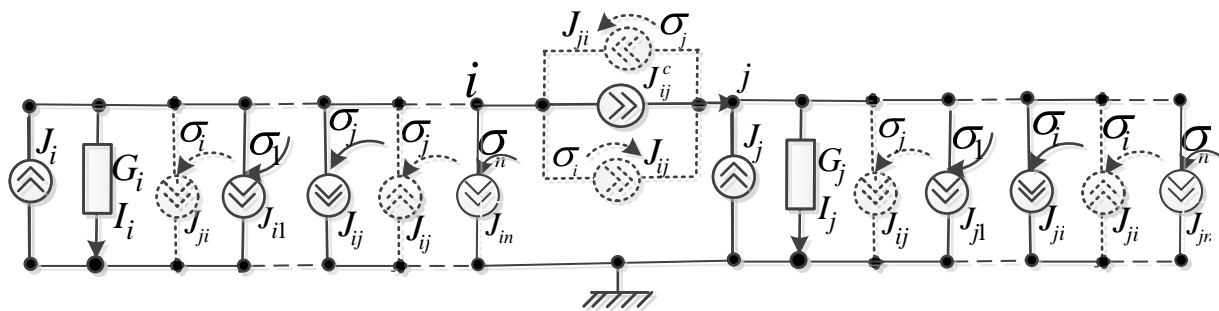


Рисунок 6 – Регулярний елемент графа після переносу джерел потоку

Після переносу джерел потоку виконується еквівалентне перетворення регулярного елемента графа з паралельним з'єднанням компонент (рис. 7 а).

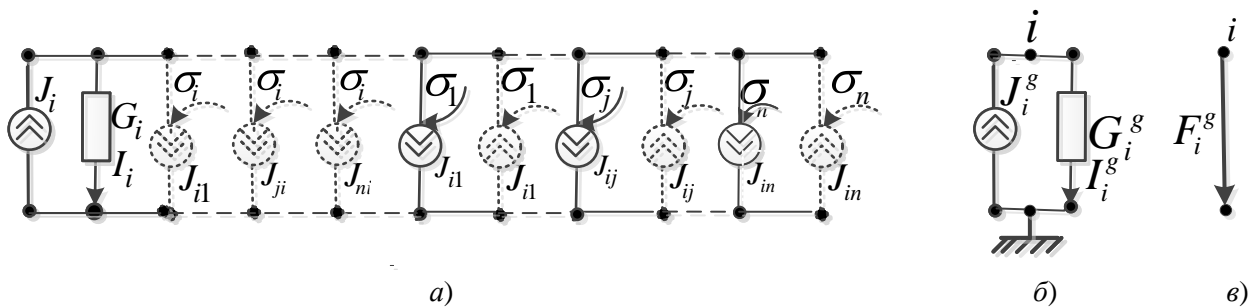


Рисунок 7 – Граф F_i -ого підграфа після переносу джерел потоку: а) до; б) після перетворення;

в) умовна позначка F_i^g графа F_i -ого підграфа після перетворення

Граф регулярного елемента містить дві такі ділянки. До першої ділянки відноситься паралельне з'єднання залежних джерел потоку в кожному з F_i -ого та F_j -ого підграфів, як показано на рис. 7 а. У цьому випадку перетворення виконується в такий спосіб. Насамперед, видаляються із графа F_i -ого підграфа кожні дві однакові компоненти, що мають протилежний напрямок (рис. 7 а). $n-1$ залежні джерела потоку залежать від однієї й тієї ж поверхневої щільності функції σ_i компоненти типу провідності G_i цього графа, тобто, у

процесі трансформації відбулася зміна типу компоненти від джерела потоку на провідність. Паралельне з'єднання компонент типу провідності замінюється на одну i -у компоненту в результаті такого перетворення:

$$I_i^g = I_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} J_{ij} = a_{ii} \sigma_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_{ij} \sigma_i = (a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_{ij}) \sigma_i, \quad (13)$$

де I_i^g – загальний потік поверхневої щільності функції паралельного з'єднання компонент. З вираження (13) витікає, що провідність G_i^g i -ої компоненти обчислюється таким способом:

$$G_i^g = (a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_{ij}). \quad (14)$$

Компонентне рівняння i -ої компоненти має вигляд

$$I_i^g = G_i^g \sigma_i, \quad (15)$$

де I_i^g – потік поверхневої щільності функції i -ої компоненти. Після заміни паралельного з'єднання компонент на i -у компоненту типу провідність, граф F_i -ого підграфа, який показано на рис. 7 а, здобуває вид, як на рис. 7 б, а на рис. 7 в показана умовна позначка F_i -ого підграфа після заміни паралельного з'єднання компонент.

До другої ділянки відноситься паралельне з'єднання компонент типу джерело потоку, які зв'язують i і j вузли підграфів (рис. 6). Трансформація виконується таким чином, щоб у паралельному з'єднанні була присутня компонента типу провідність. Тільки у цьому випадку у графі дискретної моделі можливий різноманітний вибір дерева. Нижче приводиться відповідне перетворення вираження, що описує загальний потік паралельного з'єднання компонент.

$$\begin{aligned} J_{ij}^c + J_{ij} - J_{ji} &= a_{ij} \sigma_j - a_{ji} \sigma_i = a_{ij} \sigma_j - a_{ji} \sigma_i + a_{ij} \sigma_i - a_{ij} \sigma_i = \\ &= a_{ij} (\sigma_j - \sigma_i) + (a_{ij} - a_{ji}) \sigma_i = -a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) + (a_{ij} - a_{ji}) \sigma_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Вираження (16) інтерпретується в такий спосіб. Позначимо поверхневу щільність функції між i і j вузлами як

$$\sigma_{ij} = \sigma_i - \sigma_j. \quad (17)$$

Тоді перший член $-a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j)$ є функціональна залежність ij -ої компоненти типу провідність. Компонентне рівняння має такий вигляд:

$$I_{ij}^g = G_{ij}^g \sigma_{ij}. \quad (18)$$

Провідність компоненти обчислюється таким чином:

$$G_{ij}^g = -a_{ij}. \quad (19)$$

Другий член $(a_{ij} - a_{ji}) \sigma_i$ є функціональна залежність ij -ої компоненти типу залежне джерело потоку поверхневої щільності функції i -ої компоненти. Компонентне рівняння ij -ої компоненти має такий вигляд:

$$J_{ij}^g = K_{ij}^g \sigma_i, \quad (20)$$

де J_{ij}^g – потік ij -ої компоненти типу залежне джерело потоку. K_{ij}^g – коефіцієнт залежності ij -ої компоненти типу залежне джерело потоку поверхневої щільності функції i -ої компоненти і обчислюється таким чином:

$$K_{ij}^g = a_{ij} - a_{ji}. \quad (21)$$

На рис. 8 а паралельне з'єднання компонент типу джерело потоку показано до, після трансформації і його умовну позначку як F_{ij}^g підграф паралельного з'єднання компонент після трансформації. На рис. 8 б наведено регулярний елемент графа (рис. 7) після еквівалентного перетворення й трансформації. Як витікає з рис. 8 б, у контур G_i^g , G_{ij}^g , G_j^g графа входять компоненти типу провідність. Контур охоплює всі вузли графа, що означає можливість різноманітного вибору дерева у графі дискретної моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно щільності вторинних джерел.

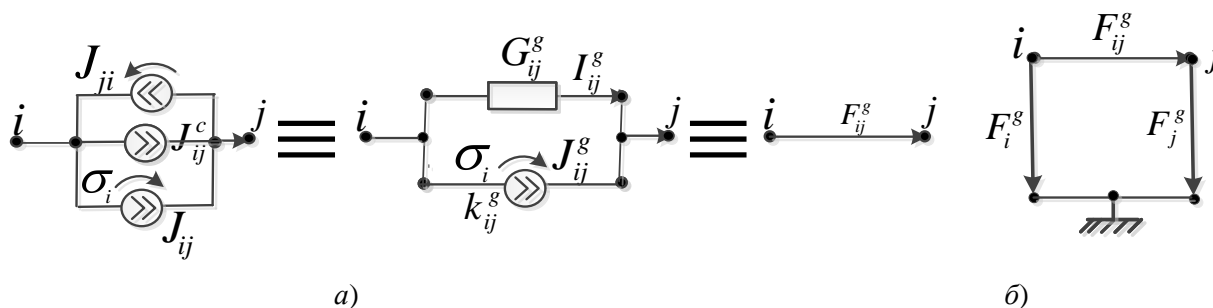


Рисунок 8 – Етапи трансформації: а) паралельне з'єднання компонент, що зв'язують вузли i й j підграфів до, після трансформації і як умовна позначка F_{ij}^g -ий підграф – паралельне з'єднання компонент після трансформації; б) фрагмент графа рис. 7 після трансформації

Граф дискретної моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно щільностей вторинних джерел, який задовольняє вимогам методу коректного складання опису, наведено на рис. 9. Тут використовуються такі умовні позначки гілок графа.

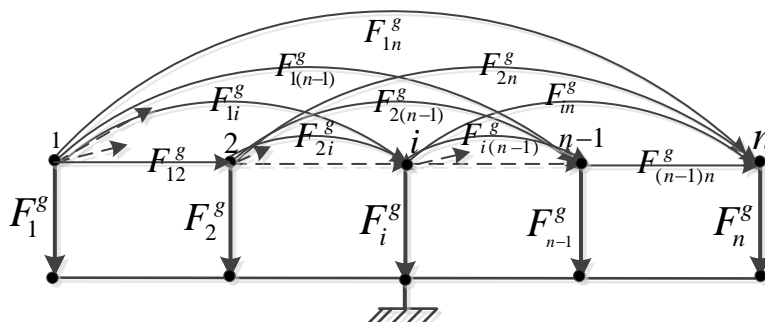


Рисунок 9 – Остаточний граф дискретної моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно щільностей вторинних джерел

F_i^g – умовна позначка графа F_i -ого підграфа після перетворення (рис. 7 б); F_{ij}^g – умовна позначка паралельного з'єднання компонент, що зв'язує вузли i й j підграфів після трансформації (рис. 8 а).

При побудові графа конкретної дискретної моделі передбачається, що коефіцієнти a_{ij} лінійної системи рівнянь (6) n -ого порядку вже обчислені за формулами (7). $f_i = f(Q_i)$ – компоненти n -мірного вектора f -задані. Параметри компонент, що входять у граф, обчислюються в такій послідовності.

Провідність G_i^g F_i^g -ого підграфа, де $i = 1, 2, \dots, n$, обчислюється за формулою (14).

Для кожного з F_j^g -их, де $j = i + 1, \dots, n$ і $j \leq n$ підграфів, перевіряється наявність зовнішнього зв'язку в обох напрямках, тобто $|a_{ij}| > 0$ і $|a_{ji}| > 0$. Якщо такий зв'язок є, то:

- обчислюється G_{ij}^g – провідність F_{ij}^g -ого підграфа за формулою (19);
- обчислюється K_{ij}^g – коефіцієнт залежності джерела потоку від поверхневої щільності функції F_{ij}^g -ого підграфа за формулою (21).

Питання, пов'язані з організацією подання графа дискретної моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно щільностей вторинних джерел у базі даних обчислювальних засобів, і як працювати з цими даними, в роботі не розглядаються.

6. Висновки

У даній роботі запропоновано новий підхід до рішення СЛАР з погано обумовленою матрицею, що виникає в дискретній моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, складеної методом вторинних джерел. Суть нового підходу. Є метод коректного складання опису електричного ланцюга. У цьому методі вперше при описі електричного ланцюга враховуються параметри конкретного завдання, що відсутні в інших методах. У результаті цього рішення завдання стійке навіть у випадку СЛАР з погано обумовленою матрицею. До недоліку даного методу варто віднести опис електричного ланцюга у вигляді графа. Єдиним варіантом застосування методу коректного складання опису до дискретної моделі інтегрального рівняння є трансформація її до форми подання опису електричного ланцюга. Для досягнення поставленої мети виконано такі завдання:

- сформульовано вимоги методу коректного складання опису, яким повинна задовольняти форма подання опису дискретної моделі інтегрального рівняння;
- проведено аналіз лінійної дискретної моделі інтегрального рівняння, побудовано граф дискретної моделі й сформульовано вимоги до методики трансформації цього графа до графа, який задовольняє вимогам методу;
- виконано трансформацію графа дискретної моделі до виду, що задовольняє вимогам методу.

Остаточний результат: запропонований опис дискретної моделі інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, складеної методом вторинних джерел у вигляді графа, задовольняє вимогам методу.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Тозони А.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.
2. Волобоев В.П., Клименко В.П. Корректная формулировка физической задачи и плохо обусловленная матрица. *Математичні машини і системи*. 2019. № 3. С. 101–110.
3. Волобоев В.П. Составление уравнений цепи, содержащей зависимые двухполюсники и многополюсники. *Вопросы проектирования математических машин и устройств*. Киев: Научный совет по кибернетике АН УСАН УССР, 1972. С. 3–16.
4. Волобоев В.П. К учету сходимости численных методов при составлении уравнений цепи постоянного тока. *Вопросы проектирования математических машин и устройств*. Киев: Научный совет по кибернетике АН УСАН УССР, 1972. С. 17–26.

5. Волобоев В.П. О расширении класса схем, моделируемых методом напряжений ветвей дерева. *Проектирование технических средств ЭВМ и систем*: сб. научных трудов. Киев: Изд-во ИК АН УССР 1982. С. 32–36.
6. Волобоев В.П. Входной язык для моделирования микроэлектронных устройств программой общего назначения. *Моделирование и разработка интегральных структур микроэлектронных устройств*: сб. научн. тр. Киев: Изд-во ИК АН УССР, 1886. С. 4–7.
7. Волобоев В.П., Клименко В.П. Об одном подходе к моделированию энергосистем. *Математичні машини і системи*. 2009. № 4. С. 106–118.
8. Волобоев В.П., Клименко В.П. Механика стержневых систем и теория графов. *Математичні машини і системи*. 2012. № 2. С. 81–96.
9. Волобоев В.П., Клименко В.П. Метод конечных элементов и теория графов. *Математичні машини і системи*. 2013. № 4. С. 114–126.
10. Матвиенко В.А. Основы теории цепей: учебн. пособ. для вузов. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016. 162 с. URL: https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/43549/1/978-5-8295-0425-0_2016.pdf.

Стаття надійшла до редакції 18.11.2020