

УДК 537.612+537.212+621.3.01

О.О. БРОВАРЕЦЬ*, Ю.В. ЧОВНЮК**

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ТРИВИМІРНИХ КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ БЕЗКОНТАКТНИХ ІНДУКТОМЕТРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НАД ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМ ҐРУНТОМ ГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ. Ч. I

*Київський кооперативний інститут бізнесу та права, м. Київ, Україна

**Національний університет біоресурсів та природокористування України, м. Київ, Україна

Анотація. Робота присвячена вирішенню задачі теорії тривимірного квазістаціонарного електромагнітного поля, що генерується безконтактним індуктометром при його взаємодії з розташованим під ним на деякій відстані електропровідному ґрунті сільськогосподарського призначення, питома електропровідність якого вимірюється. Особливістю даного дослідження є те, що воно засноване на отриманні точного аналітичного рішення задачі для електромагнітного поля, створюваного довільним просторовим контуром зі струмом (модель безконтактного індуктометра), розташованим поблизу електропровідного тіла, що намагнічується, з плоскою поверхнею (модель електропровідного ґрунту сільськогосподарського призначення), вихрові струми. Рішення з урахуванням замкнутості контурів знайдено у вигляді квадратур для векторного та скалярного потенціалів, напруженостей магнітного та електричного полів в електропровідному середовищі без обмежень на геометрію контурів, властивості середовища та частоту поля. Наявність точного рішення, крім безперечної переваги, пов'язаного з обґрунтованістю знайдених результатів, дозволяє отримати ряд наслідків, справедливих для довільного поля в системі. Іншим важливим наслідком точного рішення є висновок, що неоднорідне електромагнітне поле при проникненні в електропровідний простір згасає із глибиною завжди швидше, ніж однорідне поле. Для імпульсних полів розрахунок обмежений певним проміжком часу від початку дії імпульсу струму, причому, чим ближче до початкового моменту часу, тим більш точно розраховується електромагнітне поле. Так, як зазвичай, імпульс струму змінюється найбільш швидко і досягає найбільших значень протягом відносно малого проміжку часу, отже на цьому найважливішому етапі визначається електромагнітне поле.

Ключові слова: моделювання, аналіз, тривимірне квазістаціонарне електромагнітне поле, безконтактний індуктометр, електропровідність питома, ґрунт сільськогосподарського призначення.

Abstract. The paper is devoted to solving the problem of the theory of three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field generated by a non-contact inductometer in its interaction with the electrically conductive agricultural soil located below it at some distance and whose specific electrical conductivity is measured. The peculiarity of this study is that it is based on obtaining an accurate analytical solution to the problem of an electromagnetic field created by an arbitrary spatial circuit with a current (contactless inductometer model) located near a magnetized electrically conductive body with a flat surface (agricultural conductive soil model). Solutions made by taking into account the closed circuits are found in the form of squares for vector and scalar potentials, magnetic and electric field strengths in an electrically conductive medium without restrictions on the geometry of the circuits, environmental properties, and field frequency. Having a precise solution, in addition to the indisputable advantage associated with the validity of the results found, allows obtaining a number of consequences that are valid for an arbitrary field in the system. Another important consequence of an accurate solution is the conclusion that an inhomogeneous electromagnetic field when penetrating into an electrically conductive space with depth always attenuates faster than a homogeneous field. For pulsed fields, the calculation is limited to a certain period of time from the beginning of the current pulse, and the closer to the initial moment of time, the more accurately the electromagnetic field is calculated. Since the current pulse usually changes the fastest and reaches its highest values in a relatively short period of time, it is at this most important stage that the electromagnetic field is determined.

Keywords: modeling, analysis, three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field, non-contact inductometer, specific electrical conductivity, agricultural soil.

DOI: 10.34121/1028-9763-2022-2-77-82

1. Вступ

Основна спрямованість досліджень пов'язана з точним аналітичним рішенням тривимірної квазістаціонарної задачі, яка формується в досить спільній постановці, знаходженні електромагнітного поля довільного просторового контуру (моделі безконтактного індуктометра) зі змінним струмом, розташованого над провідним (намагнічуваним) напівпростором сільськогосподарського призначення, питома електропровідність якого вимірюється безконтактним методом. Крім того, важливим є завдання визначення на основі отриманого точного аналітичного рішення загальних закономірностей формування поля в системі, що розглядається.

У дослідженні розвинений аналітичний метод вирішення завдання досить широкого кола об'єктів, де ефективними залишаються спеціалізовані аналітичні чи чисельно-аналітичні методи. До подібних об'єктів відносяться, зокрема, не тільки електропровідні ґрунти (сільськогосподарського призначення), але й системи, геометричні особливості яких характеризуються різною зміною поля у пристрої – швидкими змінами поблизу елементів зі струмом (тобто поблизу індуктометра) або поблизу межі розділу середовищ («повітря – поверхня ґрунту») і значно повільнішим в іншій частині простору, істотно більшого обсягу [1].

Аргументом на користь аналітичних методів є також можливість отримання загальних закономірностей протікання фізичних процесів встановити які, а тим паче обґрунтувати їхній загальний характер на основі чисельного вирішення великої кількості конкретних завдань, важко.

Метою статті є моделювання та аналіз тривимірних квазістаціонарних електромагнітних полів безконтактних індуктометрів, розміщених над електропровідним ґрунтом господарського призначення.

Поставлене завдання раніше розглядалося у багатьох роботах, зокрема, і загально-теоретичного характеру, в яких щонайменше накладалися обмеження на геометрію системи чи електрофізичні властивості електропровідного середовища. У роботі [2] рішення знайдено тільки для джерел поля у вигляді плоского струмового контуру, розташованого паралельно щодо межі розділу середовищ. У роботі [3], навпаки, вирішувалося завдання про провідника, що лежить у площині, перпендикулярній межі поділу середовищ. У цьому дослідженні розвинені теорія і аналітичні методи розрахунку тривимірного електромагнітного поля у спільній постановці, де первинне поле створюється змінним струмом, що протікає по контуру просторової конфігурації довільним чином орієнтованому щодо межі розділу середовищ, а в електропровідному тілі враховуються виникаючі в ньому силові контури. У ньому не накладаються обмеження на геометрію контуру, частоту поля, електрофізичні властивості середовища. У такій постановці завдання охоплює отримані раніше результати, які мають окремі обмеження за певними характеристиками, і дозволяє встановити деякі загальні закономірності формування електромагнітного поля.

Надалі розглядатимемо довільний контур у неелектропровідному немагнітному середовищі (у повітрі) з відносно діелектричною проникністю ε_e , по якому протікає струм $I_0(t)$. Контур розташований поблизу електропровідного тіла із плоскою межею (модель ґрунту сільськогосподарського призначення), що володіє електропровідністю Y та відносною магнітною проникністю μ . На рис. 1 вихідний контур зі струмом показаний суцільною кривою у верхньому напівпросторі $z > 0$; точками M і Q відзначені власне точка витоку поля на контурі зі струмом та точка спостереження, в якій визначається величина

електромагнітного поля. Елемент контуру довжиною представлений у dl вигляді спрямованого елементарного відрізка $\vec{t}_M dl$, де \vec{t}_M – єдиний дотичний вектор до контуру в точці M . Вісь z орієнтована перпендикулярно межі розділу середовищ у вертикальному напрямку.

Вважається, що розміри контуру значно менші, ніж розміри плоскої ділянки поверхні тіла, що дозволяє використовувати модель контуру зі струмом над електропровідним напівпровідником. Розглядається лінійне завдання в кусково-однорідному середовищі, властивості якого змінюються стрибком при переході з нижнього у правильніший напівпростір. Оскільки кінцевим результатом є отримання аналітичного рішення квазістаціонарного завдання, при якому площина струму задовольняє умові безперервності $div \vec{j} = 0$, необхідно розглядати замкнутий контур із незмінним вздовж його струмом $I_0(t)$.

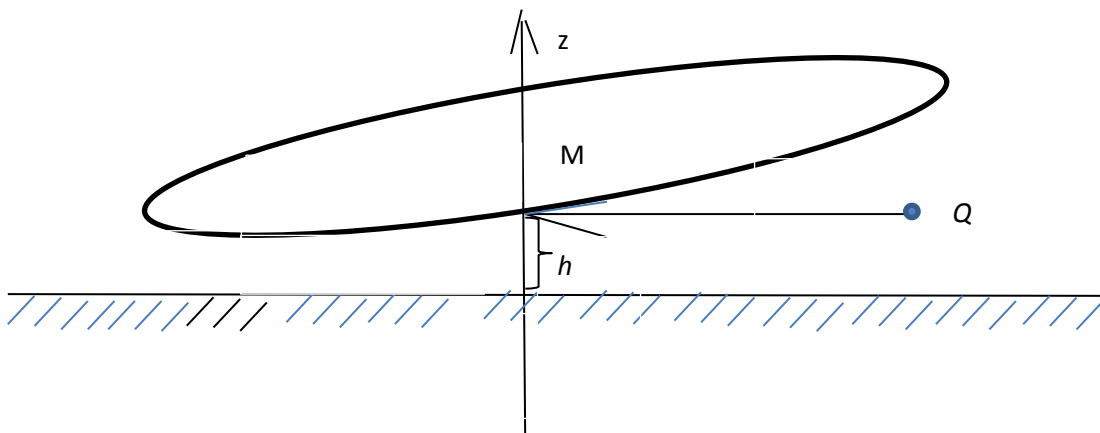


Рисунок 1 – Розрахункова модель

2. Електромагнітне поле довільного просторового контуру струму, розташованого поблизу електропровідного тіла із плоскою поверхнею

2.1. Загальне розв'язання хвильового завдання

У роботі [4] зазначено, що клас електромагнітних полів може описуватися як за допомогою рівнянь квазістаціонарного поля, так і на основі загальних хвильових рівнянь. Перехід до квазістаціонарної постановки виконується з урахуванням отриманого рішення хвильового завдання. Саме такий підхід застосовується у цьому пункті дослідження, що пов'язано з наступними двома обставинами. По-перше, для отримання розв'язання квазістаціонарного завдання використовується відоме рішення хвильової задачі [5], в якій поле контуру зі струмом розглядається як суперпозиція полів системи струмових диполів. По-друге, наявність напруженості електричного поля в діелектричному середовищі обумовлює перебіг у ній відповідних струмів зміщення. У квазістаціонарній постановці зазвичай нехтують струмами усунення в усьому просторі. Однак оскільки струми провідності в діелектричному середовищі відсутні, то при такій постановці вирівнюються струми в різних середовищах, що потребує обґрунтування. Тому це питання слід розглядати на основі точного вирішення тривимірного квазістаціонарного завдання.

2.1.1. Постановка задачі та основні рівняння

Питання про електромагнітне поле випромінюючого струмового диполя було підняте і поставлене в середині минулого століття в роботах Г. Грінберга [6], А. Зоммерфельда [7] та інших авторів. Подальший розвиток у спільній постановці для диполя, довільно розта-

шованого щодо межі поділу середовищ, завдання отримало у роботі О. Тозоні [5], присвяченій дослідженню НВЧ пристроїв, де необхідно було враховувати геометричну конфігурацію струмовідних контурів, електрофізичні та геометричні властивості підкладки для смужкових ліній та інші фактори. Контури зі струмом без обмеження спільності представлялися послідовною системою струмових диполів. Привабливість моделі полягає в можливості отримання аналітичного рішення задачі.

Сформулюємо завдання для комплексних амплітуд електромагнітного поля, спочатку не обмежуючи розміри контуру зі струмом. У хвильовій постановці проблема зводиться до розв'язання задачі, яка описується рівняннями Максвелла для комплексних амплітуд векторів поля: напруженостей електричного \vec{E} та магнітного \vec{H} полів, векторів індукції магнітного поля \vec{B} і електричного зміщення \vec{D} , повного струму (точніше, повної щільності струму), який складається зі щільності струму сторонніх джерел в елементах контуру \vec{j}_0 , щільності струму провідності \vec{j} та щільності струму зміщення $\vec{j}_D = i \cdot \omega \cdot \vec{D}$, $i^2 = -1$, $\vec{j}_t = \vec{j} + \vec{j}_D$:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_0 + \vec{j}_t; & \text{div } \vec{B} = 0, \\ \text{rot } \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{B}; & \text{div } \vec{D} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де ω – циклічна частота, i – уявна одиниця.

Для лінійної задачі вільний заряд у кусково-однорідному середовищі може бути зосереджений лише на поверхні розділу середовищ («повітря/грунт») з відповідною поверхневою щільністю заряду δ , тому в останньому з рівнянь (1), які описують поле поза межею поверхні (тобто в повітрі), заряд відсутній і пропущений.

Використовуючи комплексну електропровідність $\tilde{\gamma} = \gamma + i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0$, де ε_0 – абсолютна діелектрична проникність вакууму, а ε – відносна діелектрична проникність середовища, матеріальні рівняння, що доповнюють (1), записуються у вигляді

$$\begin{cases} z > 0: & \vec{j}_{te} = \vec{j}_e = \tilde{\gamma}_e \cdot \vec{E}_e, & \vec{D}_e = \varepsilon_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_e \cdot \vec{E}_e, & \vec{B}_e = \mu_0 \cdot \vec{H}_e, \\ z < 0: & \vec{j}_{ti} = \vec{j}_l = \tilde{\gamma}_l \cdot \vec{E}_l, & \vec{D}_l = \varepsilon_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_l \cdot \vec{E}_l, & \vec{B}_l = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}_l, \end{cases} \quad (2)$$

де індексами «e» та «i» відзначені величини в областях $z > 0$ (повітря) $z < 0$ (грунт) відповідно.

μ_0 – абсолютна магнітна проникність вакууму;

μ – відносна магнітна проникність середовища ($z < 0$), тобто ґрунту.

Комплексна електропровідність у різних галузях (повітря, ґрунт) набуває конкретних значень: $\tilde{\gamma}_e = \gamma + i \cdot \omega \cdot \tilde{\varepsilon}_e \cdot \varepsilon_0$ (повітря), $\tilde{\gamma}_l = \gamma$ (ґрунт або ґрунту), комплексна відносна діелектрична проникність пов'язана з комплексною провідністю співвідношенням (для ґрунту) $\tilde{\gamma} = i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \tilde{\varepsilon}$ [8].

Введенням векторного \vec{A} та скалярного φ потенціалів

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - i \cdot \omega \cdot \vec{A}, \quad (3)$$

а також калібруванням Лоренца

$$i \cdot \omega \cdot \text{div } \vec{A} - k^2 \cdot \varphi = 0, \quad (4)$$

де $k^2 = -i \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \tilde{\gamma}$ – хвильовий параметр, із рівнянь Максвелла (1) отримуємо рівняння для потенціалів:

$$\begin{cases} z > 0: \Delta \bar{A}_e + k_e^2 \cdot \bar{A}_e = -\mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{j}_0, \Delta \varphi_e + k_e^2 \cdot \varphi_e = 0, \\ z < 0: \Delta \bar{A}_i + k_i^2 \cdot \bar{A}_i = 0, \Delta \varphi_i + k_i^2 \cdot \varphi_i = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тут, в (5), $k_e^2 = -i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_e = \omega^2 \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_e$,

$$k_i^2 = -i \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \tilde{\gamma}_i = -i \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_i = \omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_i.$$

У припущенні, що провідник є нескінченно тонким (елемент індуктометра), щільність струму \vec{j}_0 в (5) записуємо з використанням дельта-функції Дірака:

$$\vec{j}_0 = l_0 \cdot \delta \cdot (\vec{r}_M - \vec{r}) \cdot \vec{t}_M. \quad (6)$$

Рівняння (5) записано і для векторного (\bar{A}), і для скалярного потенціалу (φ). Однак, оскільки для хвильової задачі завжди $k^2 \neq 0$, то, як випливає з (4), достатньо знати лише векторний потенціал. Навпаки, у квазістаціонарній постановці при зневажанні струмами усунення в діелектричному середовищі, тобто, при $k_e^2 = 0$, розподілу векторного потенціалу (\bar{A}) для знаходження електромагнітного поля недостатньо, завдання має бути доповнене співвідношеннями, які визначають також і скалярний потенціал (φ).

Завдання сполучення, крім диференціальних рівнянь (5), повинно містити умови для тангенціальних і нормальних складових векторних полів на межі розділу середовищ рівності тангенціальних складових напруженостей магнітного та електричного полів, умова рівності нормальних складових індукції магнітного поля [5, 8] вектор щільності струму:

$$\begin{cases} [e_z \cdot (\vec{E}^+ - \vec{E}^-)] = 0, [e_z \cdot (\vec{H}^+ - \vec{H}^-)] = \vec{j}_s, \\ [e_z \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-)] = 0, [e_z \cdot (\vec{j}_i^+ - \vec{j}_i^-)] = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де \vec{j}_s – поверхнева щільність струму, \vec{e}_z – орт вздовж осі Oz , знаки (+) і (-) відповідають ($z > 0$) і ($z < 0$).

Щодо останньої умови (1.7), яка випливає з закону повного струму, необхідно вказати, що зазвичай замість нього використовують граничну умову для нормальних компонент вектора електричного зміщення $[e_z \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-)] = 0$, що є безпосереднім наслідком електростатичної теорії Гаусса. У цьому випадку рівність нормальних компонент вектора електричного зміщення обумовлено врахуванням у матеріальних рівняннях (2) як струмів провідності, і струмів зміщення, введенням комплексної провідності та відносної діелектричної проникності, а також відсутністю вільного поверхневого заряду, зумовленого іншими фізичними явищами. Обидві граничні умови є рівнозначними, а використання граничної умови для площини струму, а не для вектора електричного зміщення, пов'язане з аналізом електромагнітних процесів у системі з електропровідним середовищем, хоча це й не так важливо.

Електромагнітне поле на нескінченності згасає, тому задачу вирішують за умови рівності нулю векторного потенціалу в нескінченно віддалених точках:

$$[\bar{A}(\infty)] = 0. \quad (8)$$

Рішенню підлягають рівняння поля для векторного потенціалу (5). При цьому і граничні умови мають бути переписані для \bar{A}_e та \bar{A}_i . У цьому випадку необхідно скористатися

співвідношеннями (3) та (4), що зв'язують вектори поля \vec{B} , \vec{H} , \vec{E} і \vec{D} із векторним потенціалом.

3. Висновок

Отже, отримані закономірності дозволяють провести моделювання та аналіз тривимірних квазістаціонарних електромагнітних полів безконтактних індуктометрів, розміщених над електропровідним ґрунтом господарського призначення.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Васецкий Ю.М. Асимптотические методы решения задач электродинамики в системах с массивными криволинейными проводниками. Киев: Наукова думка, 2010. 271 с.
2. Acero I., Alouso R., Burdio I.M., Barragan L.A., Puyal D. Analytical Equivalent Impedance for a Planar Induction Heating System. *IEEE Transaction on Magnetics*. 2006. Vol. 42, N 1. P. 84–86.
3. Цицикян Г.Н. Электромагнитное поле линейного проводника с током параллельного граничной плоскости «воздушная среда – проводящее пространство». *Электричество*. 1997. № 12. С. 55–61.
4. Шимони К. Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1964. 775 с.
5. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.
6. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л.: Издательство АН СССР, 1948. 727 с.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: Издательство иностранной литературы, 1958. 501 с.
8. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч. 3: Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969. 352 с.

Стаття надійшла до редакції 13.04.2022