https://orcid.org/0000-0003-4894-8995

УДК 517.958:519.63

М.Г. БЕРДНИК*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛІВ ТЕМПЕРАТУРИ АНТЕННИХ РЕФЛЕКТОРІВ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ НОВОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

*Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», м. Дніпро, Україна

Анотація. *Прогнозування механічних властивостей рефлектора і, перш за все, відхилення високоточної форми поверхні, що відбиває (ФПВ) від заданої, є головною метою проєктування антен космічних апаратів (КА). Спотворення ФПВ визначається напружено-деформованим станом елементів конструкцій рефлекторів в умовах орбітальної експлуатації. При цьому основним фактором, що визначає спотворення ФПВ рефлекторів у відкритому космосі є температурні деформації за рахунок нерівномірного розподілу сонячних теплових потоків за елементами конструкції. Тому актуальним є розвиток методів та моделей для розрахунку температурних полів у рефлекторах при теплових потоках на поверхні. У статті вперше побудоване нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в циліндричній системі координат для області, обмеженої декількома замкненими кусково-гладкими контурами. Приводиться формула оберненого перетворення. У статті вперше побудовано математичну модель розрахунку полів температури в параболоїді, який обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності із граничними умовами Діріхле. За допомогою розробленого інтегрального перетворення знайдені температурні поля в параболоїді у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну параболоїда обертання може бути застосовано при модулюванні температурних полів, які виникають в антенних рефлекторах космічних апаратів. Розроблене інтегральне перетворення дає можливість отримати рішення складних крайових задач математичної фізики.*

Ключові слова: *крайова задача, інтегральне перетворення, оператор Лапласа, власні значення, власні функції.*

Abstract. *Prediction of the mechanical properties of the reflector, and above all, the deviation of the highly accurate shape of the reflecting surface (RSS) from the given one is the main goal of designing spacecraft antennas. Distortion of the RSS is determined by the stress-deformed state of the elements of the reflector structures under the conditions of orbital operation. At the same time, the main factor determining the distortion of reflectors with RSS in open space is temperature deformation due to the uneven distribution of solar heat fluxes among structural elements. Therefore, the development of methods and models for calculating temperature fields in reflectors during heat flows on the surface is relevant. In the article, for the first time, a new finite integral transformation for the Laplace equation in a cylindrical coordinate system is constructed for a region bounded by several closed piecewise smooth contours. The inverse transformation formula is given. In the article, for the first time, a mathematical model for the calculation of temperature fields in a paraboloid rotating with a constant angular velocity is constructed, taking into account the finite speed of heat propagation in the form of a boundary value problem of mathematical physics for the hyperbolic equation of heat conduction with Dirichlet boundary conditions. With the help of the developed integral transformation, the temperature fields in the paraboloid were found in the form of convergent series according to the Fourier functions. The found solution to the generalized boundary value problem of the heat transfer of the paraboloid of rotation can find application in modulating the temperature fields that arise in the antenna reflectors of space vehicles. The developed integral transformation makes it possible to obtain solutions to complex boundary value problems of mathematical physics.*

Keywords: *boundary value problem, integral transformation, Laplace operator, eigenvalues, eigenfunctions.*

DOI: 10.34121/1028-9763-2022-3-158-165

1. Вступ. Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій

Прогнозування механічних властивостей рефлектора і, перш за все, відхилення високоточної форми поверхні, що відбиває (ФПВ) від заданої, є головною метою проєктування антен космічних апаратів (КА). Спотворення ФПВ визначається напружено-деформованим станом елементів конструкцій рефлекторів в умовах орбітальної експлуатації. При цьому основним фактором, що визначає спотворення ФПВ рефлекторів у відкритому космосі, є температурні деформації за рахунок нерівномірного розподілу сонячних теплових потоків за елементами конструкції. Тому актуальним є розвиток методів та моделей для розрахунку температурних полів у рефлекторах при теплових потоках на поверхні. Параболічний рефлектор є найпростішою формою рефлекторної антени. Переваги даної конфігурації засновані на геометричних властивостях параболи, оскільки сферичні хвилі, які випромінюються джерелом і розміщені в фокальній точці, перетворюються у плоскі хвилі, спрямовані уздовж осі обертання апертури [1]. Питанням дослідження термомеханічного поводження рефлекторів присвячена велика кількість робіт [2–5]. У даний час недостатньо вивчені питання про розподіл температурних полів у рефлекторах [1]. Для вирішення даного класу задач теплопровідності найбільш зручним виявився метод кінцевих інтегральних перетворень [6–14].

Мета статті. Побудувати нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в циліндричній системі координат для області, обмеженої декількома замкненими кусково-гладкими контурами, яке дозволяє досліджувати температурні поля в тілах складної форми. Побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів у параболічній рефлекторній антені у вигляді крайової задачі Діріхле математичної фізики та знаходження розв’язку отриманої крайової задачі.

2. Викладення основного матеріалу дослідження

При знаходженні температурних полів в елементах довільної конфігурації виникає необхідність розв’язання крайових задач у циліндричній системі координат в області $\Xi = \{(x,y) \mid y \in (0,\mathrm{h}), x \in (\varsigma_1(y), \varsigma(y))\}$, які містить оператор [7]:

$$M[\theta] = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2}\theta + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2},$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Для розв’язання крайових задач, які містить оператор $M[\theta]$, застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\tilde{\theta}(\mu_{n,k}) = \iint_{\Xi} x\phi(x, y, \mu_{n,k}) \cdot \theta(x,y) d\sigma, \tag{1}$$

де $\phi(x, y, \mu_{n,k})$, $\mu_{n,k}$ – власні функції (ВФ) і власні значення ВЗ.

ВФ і ВЗ тотожньо нерівні нулю в області Ξ і задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2}\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \mu_{n,k} \cdot \phi = 0 \tag{2}$$

і допоміжним умовам

$$\left.\left(\gamma_1\phi+\beta_1\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\right)\right|_{x=\varsigma_1(z)}=0,\quad \left.\left(\gamma_2\phi+\beta_2\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\right)\right|_{x=\varsigma(z)}=0, \tag{3}$$

$$\left.\left(\gamma_3\phi+\beta_3\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\right)\right|_{y=0}=0,\quad \left.\left(\gamma_4\phi+\beta_4\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\right)\right|_{y=h}=0, \tag{4}$$

де $\phi(x,y,\mu_{n,k})\subset C^2(\Xi)=\{u(x,y)\in C(\Xi):\partial_\alpha u(x,y)\in C(\Xi),\forall\alpha,|\alpha|\le 2\};\partial_\alpha u(x,y)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u(x,y)}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}}$;

$\gamma_i,\beta_i\subset C(\Gamma);\gamma_i\ge 0,\beta_i\ge 0;\gamma_i+\beta_i>0;\ i=1,2,3,4;$

$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$ – мультиіндекс, компоненти якого є цілі невід’ємні числа.

Теорема. Після застосування до оператора $M[\theta]$ інтегрального перетворення (1) одержуємо вираз для зображення

$$\tilde{\mathrm{M}}[\theta]=\int_0^h\left\langle\left\{x\left[\phi\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\theta(x,y)\right]\right\}\Bigg|_{\varsigma_1(y)}^{\varsigma(y)}\right\rangle dy+\oint_L x\left(\phi\frac{\partial\theta}{\partial y}-\theta\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx-\mu_{n,k}\tilde{\theta}, \tag{5}$$

де L – межа області Ξ . Інтегрування ведеться в додатному напрямі.

Формула оберненого перетворення має вигляд [7]

$$\theta(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi(x,y,\mu_{n,k})}{\|\phi(x,y,\mu_{n,k})\|^2}\tilde{\theta}(\mu_{n,k}). \tag{6}$$

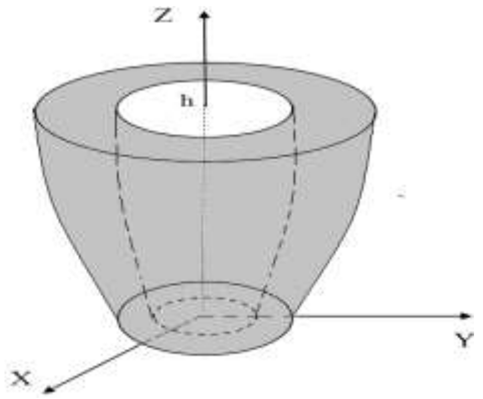

Рисунок 1 – Тонкостінний параболоїд обертання

Розглянемо розрахунок температурного поля у тонкостінному параболоїді обертання (рис. 1). Рівняння твірних ліній у циліндричній системі координат (ρ,φ,z) для зовнішніх і внутрішніх бічних поверхонь відповідно є: $r^2=2pz,\quad r^2=2p_1z,\ (p_1<p)$.

Параболоїд обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю ω, а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла постійна G_0, а на зовнішній і внутрішній бічних поверхнях тіла відоме значення температури $V(\varphi,z)$ і $V_1(\varphi,z)$ відповідно. На торцях відомі значення температури $G_1(r,\varphi)$ і $G_2(r,\varphi)$ при $z=0$ і $z=h$ відповідно.

У [7, 15] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно з [7, 15], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системі координат приймає такий вигляд:

$$\gamma\, c\left\{\frac{\partial T}{\partial t}+\omega\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{7}$$

де γ – щільність середовища, c – питома теплоємність, τ_r – час релаксації, $T(r,\varphi,z,t)$ – температура середовища, λ – коефіцієнт теплопровідності, t – час.

Математично задача визначення температурного поля параболоїда полягає в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (7) в області $D=\{(r,\varphi,z,t)|r\in(\varsigma_1(z),\varsigma(z)),\varphi\in(0,2\pi),z\in(0,h),t\in(0,\infty)\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у вигляді

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\partial t}=a\cdot\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \tag{8}$$

з початковими умовами

$$\theta(r,\varphi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta(r,\varphi,z,0)}{\partial t}=0 \tag{9}$$

і граничними умовами

$$\theta(\varsigma_1(z),\varphi,z,t)=\Psi(\varphi,z),\qquad \theta(\varsigma(z),\varphi,z,t)=G(\varphi,z), \tag{10}$$

$$\theta(r,\varphi,0,t)=\Theta(r,\varphi),\qquad \theta(r,\varphi,1,t)=\Lambda(r,\varphi), \tag{11}$$

де $\theta=\dfrac{T(r,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура тіла;

$T_{\max}=\max\limits_{r,\varphi,z}\{V(\varphi,z),V_1(\varphi,z),G_1(r,\varphi),G_2(r,\varphi)\}$;

$z=\dfrac{z}{h}$;

$\Psi(\varphi,z),G(\varphi,z),\Theta(r,\varphi),\Lambda(r,\varphi)\in\mathrm{C}(0,2\pi)$;

$a=\dfrac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності.

Тоді рішення крайової задачі (8)–(11) $\theta(r,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим за r,φ,z, один раз за t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [16], тобто $\theta(r,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $G(\varphi,z)$, $\Psi(\varphi,z)$, $\Theta(r,\varphi)$, $\Lambda(r,\varphi)$, $\theta(r,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [16]:

$$\left\{\begin{matrix}\theta(r,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ \Psi(\varphi,z)\\ \Theta(r,\varphi)\\ \Lambda(r,\varphi)\end{matrix}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\begin{matrix}\theta_n(r,z,t)\\ G_n(z)\\ \Psi_n(z)\\ \Theta_n(r)\\ \Lambda_n(r)\end{matrix}\right\}\cdot\exp(\mathrm{i}n\varphi), \tag{12}$$

де $\begin{Bmatrix} \theta_n(r,z,t) \\ G_n(z) \\ \Psi_n(z) \\ \Theta_n(r) \\ \Lambda_n(r) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \theta(r,\varphi,z,t) \\ G(\varphi,z) \\ \Psi(\varphi,z) \\ \Theta(r,\varphi) \\ \Lambda_n(r) \end{Bmatrix} \cdot \exp(-\mathrm{i}n\varphi)d\varphi;\ \theta_n(r,z,t) = \theta_n^{(1)}(r,z,t) + \mathrm{i}\theta_n^{(2)}(r,z,t);$

$\mathrm{G}_n(z) = G_n^{(1)}(z) + \mathrm{i}G_n^{(2)}(z);\quad \Psi_n(z) = \Psi_n^{(1)}(z) + \mathrm{i}\Psi_n^{(2)}(z);\ \Theta_n(r) = \Theta_n^{(1)}(r) + \mathrm{i}\Theta_n^{(2)}(r);$

$\Lambda_n(r) = \Lambda_n^{(1)}(r) + \mathrm{i}\Lambda_n^{(2)}(r);$ i - уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta(r,\varphi,z,t)$ функція дійсна, надалі обмежимося розглядом $\theta_n(r,z,t)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, тому що $\theta_n(r,z,t)$ і $\theta_{-n}(r,z,t)$ будуть комплексно спряженими [16]. Підставляючи значення функцій з (12) у (8)–(11), в результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r \vartheta_n^{(i)} \frac{\partial \theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\theta_n^{(i)} + \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{13}$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(r,z,0) = 0,\quad \frac{\partial \theta_n^{(i)}(r,z,0)}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(i)}(\varsigma_1(z),z,t) = \Psi_n^{(i)}(z),\quad \theta_n^{(i)}(\varsigma(z),z,t) = G_n^{(i)}(z), \tag{15}$$

$$\theta_n^{(i)}(r,0,t) = \Theta_n^{(i)}(r),\quad \theta_n^{(i)}(r,1,t) = \Lambda_n^{(i)}(r),\quad (i=1,2), \tag{16}$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n,\ \vartheta_n^2 = \omega n,\ \mathrm{m}_1 = 2,\ \mathrm{m}_2 = 1,\ i = 1,2$.

Для розв'язання крайової задачі (16)–(19) застосовуємо інтегральне перетворення (1), де змінні (x, y) замінені на (r, z) відповідно:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \iint_{\mathrm{D}} \phi(r,z,\mu_{n,k}) \cdot r \cdot f(r,z)d\sigma, \tag{17}$$

а ВФ $\phi(x,y,\mu_{n,k})$ і ВЗ $\mu_{n,k}$ знаходяться з розв'язку спектральної задачі (2)–(4), яка в даному випадку буде мати вигляд

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\phi + \mu_{n,k} \cdot \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \tag{18}$$

$$\phi(r,0,\mu_{n,k}) = 0,\qquad \phi(r,1,\mu_{n,k}) = 0, \tag{19}$$

$$\phi(\varsigma_1(z),z,\mu_{n,k}) = 0,\quad \phi(\varsigma(z),z,\mu_{n,k}) = 0. \tag{20}$$

Формула оберненого перетворення (9) буде мати вигляд

$$f(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi(r,z,\mu_{n,k})}{\left\|\phi(r,z,\mu_{n,k})\right\|^2}\,\bar{f}(\mu_{n,k}). \tag{21}$$

ВФ $\phi(r,z,\mu_{n,k})$ і ВЗ $\mu_{n,k}$ спектральної задачі (18)–(20) знаходяться за формулами, які приведені в [7].

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (13) інтегральне перетворення (17). У результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\overline{\theta}_n^{(i)}}{d\,t}+\vartheta_n^{(i)}\left[\overline{\theta}_n^{(m_i)}+\tau_r\,\frac{d\overline{\theta}_n^{(m_i)}}{d\,t}\right]+\tau_r\,\frac{d^2\overline{\theta}_n^{(i)}}{d\,t^2}=a\left(\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}-\mu_{n,k}^2\overline{\theta}_n^{(i)}\right) \tag{22}$$

з початковими умовами

$$\overline{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k},t)=0,\qquad \frac{\partial\overline{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k},t)}{\partial t}=0, \tag{23}$$

де $\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}=\int\limits_0^1\left[\varsigma_1(z)\frac{\partial\phi(\varsigma_1(z),z,\mu_{n,k})}{\partial r}\Psi_n^{(i)}(z)-\varsigma(z)\frac{\partial\phi(\varsigma(z),z,\mu_{n,k})}{\partial r}G_n^{(i)}(z)\right]dz-\oint\limits_L r\left(\theta_n^{(i)}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dr.$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкненому, додатно орієнтованому контуру ADCB (рис. 2).

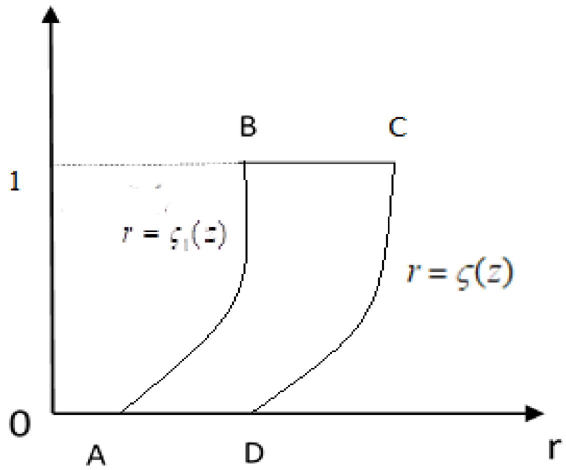

Рисунок 2 – Замкнутий контур із твірними лініями
$r=\varsigma_1(z)$, $r=\varsigma(z)$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (22) з умовами (23) інтегральне перетворення Лапласа [16]:

$$\tilde{f}(s)=\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$s\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\overline{\theta}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\tilde{\overline{\theta}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}=q_{n,k}\left(\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu^2{}_{n,k}}-\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}\right), \tag{24}$$

де $q_{n,k}=a\mu^2{}_{n,k}$.

Розв’язавши систему рівнянь (24), одержуємо

$$\tilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}=a\,\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)+(-1)^{i+1}\omega n\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}(1+s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)^2+\omega^2n^2(1+s\tau_r)^2}. \tag{25}$$

Застосовуючи до зображення функцій (25) формули оберненого перетворення Лапласа [16], одержуємо оригінали функцій

$$\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\big[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega n\cdot\mathrm{i}\big]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\big[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)\cdot\mathrm{i}\big]\Big\}\cdot\left(e^{s_j t}-1\right)+$$
$$+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\big[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega n\mathrm{i}\big]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\big[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)\mathrm{i}\big]\Big\}\cdot\left(e^{s_j t}-1\right), \quad (26)$$

$$\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\big[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega n\mathrm{i}\big]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\big[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)\mathrm{i}\big]\Big\}\cdot\left(e^{s_j t}-1\right)+$$
$$+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\big[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega n\mathrm{i}\big]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\big[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)\mathrm{i}\big]\Big\}\cdot\left(e^{s_j t}-1\right), \quad (27)$$

де $\zeta_{n,k}(s_j)=\dfrac{0.5s_j^{-1}a}{(2\tau_r s_j+1)^2+(\tau_r\omega n)^2}$, а значення s_j для $j=1, 2, 3, 4$ визначаються за формулами

$$s_{1,2}=\frac{(\tau_r\omega ni-1)\pm\sqrt{(1+\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},\; s_{3,4}=\frac{(\tau_r\omega ni+1)\pm\sqrt{(1-\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (12) і (21) одержуємо температурне поле параболоїда, якій обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, із урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)+\mathrm{i}\cdot\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)\right]\cdot\frac{\phi(r,z,\mu_{n,k})}{\|\phi(r,z,\mu_{n,k})\|^2}\right\}\cdot\exp(\mathrm{i}\cdot n\varphi),$$

де $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t), \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються за формулами (26), (27).

3. Висновки

У статті побудовано нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в циліндричній системі координат для області, обмеженої декількома замкненими кусково-гладкими контурами, яке дає можливість отримувати рішення складних крайових задач математичної фізики.

У статті вперше побудовано математичну модель розрахунку полів температури в параболоїді, який обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності із граничними умовами Діріхле. За допомогою розробленого інтегрального перетворення знайдені температурні поля в параболоїді у вигляді збіжних рядів за функціями Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну параболоїда обертання може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають в антенних рефлекторах космічних апаратів.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бердник М.Г. Математичне моделювання температурних полів в антенних рефлекторах космічних апаратів. *Штучний інтелект*. 2022. № 1. С. 94–100. DOI: https://doi.org/10.15407/jai2022.01.094.
2. Denisov O.V., Kirabai A.A., Minakov D.S. Numerical and Experimental Estimation of Heat Conductivity for Space Antenna Reflector Material. *MATEC Web of Conferences.* 2015. Vol. 23. DOI: https://doi.org/10.1051/matecconf/20152301016.
3. Hajji A.R., Mirhosseini M., Saboonchi A., Moosavi A. Different Methods for Calculating a View Factor in Radiative Applications: Strip to In–Pane Parallel Semi–Cylinder. *Journal of Engineering Thermophysics*. 2015. Vol. 24, N 2. P. 169–180.
4. Imbriale W.A., Gao S., Boccia L. Space antenna handbook. NewJersey: John Wiley & Sons Inc., 2012. 774 p.
5. Keesee C.J. Adaptive Thermal Modelling Architecture for Small Satellite Applications. USAF Retired, 2010. 190 p.
6. Бердник М.Г. Нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області. *Математичні машини і системи*. 2020. № 3. С. 115–124.
7. Бердник М.Г. Математичні моделі та методи розв'язання узагальнених задач теплообміну тіл, що обертаються: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 01.05.02. Дніпро, 2021. 43 с.
8. Проценко В.С., Денисова Т.В. Гибридные интегральные преобразования со смешанным спектром с приложением к новому классу задач математической физики. *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии*. 2013. № 61. С. 77–81.
9. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики. Т. 2. Тернопіль: Економічна думка, 2012. 308 с.
10. Беспалова Е.И. О методе конечных интегральных преобразований в задачах статики неоднородных пластин. *Прикладная механика*. 2014. Т. 50, № 6. С. 55–68. DOI: https://doi.org/10.1007/s10778-014-0663-5.
11. Денисова Т.В., Проценко В.С. Интегральные преобразования Фурье на смешанном спектре и их применение к задачам теплопроводности. *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии*: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 2015. Вып. 69. С. 181–188.
12. Chernukha O., Bilushchak Y. Про побудову інтегрального перетворення для оператора рівняння конвективної дифузії за мішаних граничних умов. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2020. Vol. 30. P. 85–102. DOI: https://doi.org/10.15407/fmmit2020.30.085.
13. Вірченко Н.О., Четвертак М.О. Узагальнене інтегральне перетворення Фур'є. *Доповіді Національної академії наук України*. 2015. № 8. С. 7–12.
14. Громик А.П., Конет І.М. Гіперболічна крайова задача математичної фізики в напівобмеженому багатошаровому просторовому середовищі. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2016. Вип. 1 (35). С. 9–14.
15. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat- exchange problem for empty isotropic rotary body. *Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena*. 2018. Vol. 277. P. 168–177.
16. Савенко П.О., Соляр Т.Я. Перетворення Фур'є й Лапласа в задачах апроксимації. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2019. 380 с.

Стаття надійшла до редакції 20.07.2022