

УДК 537.612+537.212+621.3.01

О.О. БРОВАРЕЦЬ*, Ю.В. ЧОВНЮК**

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ТРИВИМІРНИХ КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ БЕЗКОНТАКТНИХ ІНДУКТОМЕТРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НАД ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМ ҐРУНТОМ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ. Ч. II

*Київський кооперативний інститут бізнесу та права, м. Київ, Україна

**Національний університет біоресурсів та природокористування України, м. Київ, Україна

Анотація. Робота присвячена вирішенню задачі теорії тривимірного квазістаціонарного електромагнітного поля, що генерується безконтактним індуктометром при його взаємодії з розташованим під ним на деякій відстані електропровідному ґрунті сільськогосподарського призначення, питома електропровідність якого вимірюється. Особливістю даного дослідження є те, що воно засноване на отриманні точного аналітичного рішення задачі для електромагнітного поля, створюваного довільним просторовим контуром зі струмом (модель безконтактного індуктометра), розташованим поблизу електропровідного тіла, що намагнічується, з плоскою поверхнею (модель електропровідного ґрунту сільськогосподарського призначення), вихрові струми. Рішення з урахуванням замкнутості контурів знайдено у вигляді квадратур для векторного та скалярного потенціалів, напруженостей магнітного та електричного полів в електропровідному середовищі без обмежень на геометрію контурів, властивості середовища та частоту поля. Наявність точного рішення, крім безперечної переваги, пов'язаного з обґрунтованістю знайдених результатів, дозволяє отримати ряд наслідків, справедливих для довільного поля в системі. Іншим важливим наслідком точного рішення є висновок, що неоднорідне електромагнітне поле при проникненні в електропровідний простір згасає із глибиною завжди швидше, ніж однорідне поле. Для імпульсних полів розрахунок обмежений певним проміжком часу від початку дії імпульсу струму, причому, чим ближче до початкового моменту часу, тим більш точно розраховується електромагнітне поле. Так, як зазвичай, імпульс струму змінюється найбільш швидко і досягає найбільших значень протягом відносно малого проміжку часу, отже на цьому найважливішому етапі визначається електромагнітне поле.

Ключові слова: моделювання, аналіз, тривимірне квазістаціонарне електромагнітне поле, безконтактний індуктометр, електропровідність питома, ґрунт сільськогосподарського призначення.

Abstract. The paper is devoted to solving the problem of the theory of three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field generated by a non-contact inductometer in its interaction with the electrically conductive agricultural soil located below it at some distance and whose specific electrical conductivity is measured. The peculiarity of this study is that it is based on obtaining an accurate analytical solution to the problem of an electromagnetic field created by an arbitrary spatial circuit with a current (contactless inductometer model) located near a magnetized electrically conductive body with a flat surface (agricultural conductive soil model). Solutions made by taking into account the closed circuits are found in the form of squares for vector and scalar potentials, magnetic and electric field strengths in an electrically conductive medium without restrictions on the geometry of the circuits, environmental properties, and field frequency. Having a precise solution, in addition to the indisputable advantage associated with the validity of the results found, allows obtaining a number of consequences that are valid for an arbitrary field in the system. Another important consequence of an accurate solution is the conclusion that an inhomogeneous electromagnetic field when penetrating into an electrically conductive space with depth always attenuates faster than a homogeneous field. For pulsed fields, the calculation is limited to a certain period of time from the beginning of the current pulse, and the closer to the initial moment of time, the more accurately the electromagnetic field is calculated. Since the current pulse usually changes the fastest and reaches its highest values in a relatively short period of time, it is at this most important stage that the electromagnetic field is determined.

1. Вступ

Основна спрямованість досліджень пов'язана з точним аналітичним рішенням тривимірної квазістаціонарної задачі, яка формується в досить спільній постановці, знаходженні електромагнітного поля довільного просторового контуру (моделі безконтактного індуктометра) зі змінним струмом, розташованого над провідним (намагнічуваним) напівпростором сільськогосподарського призначення, питома електропровідність якого вимірюється безконтактним методом. Крім того, важливим є завдання визначення на основі отриманого точного аналітичного рішення загальних закономірностей формування поля в системі, що розглядається.

У дослідженні розвинений аналітичний метод вирішення завдання досить широкого кола об'єктів, де ефективними залишаються спеціалізовані аналітичні чи чисельно-аналітичні методи. До подібних об'єктів відносяться, зокрема, не тільки електропровідні ґрунти (сільськогосподарського призначення), але й системи, геометричні особливості яких характеризуються різною зміною поля у пристрої – швидкими змінами поблизу елементів зі струмом (тобто поблизу індуктометра) або поблизу межі розділу середовищ («повітря – поверхня ґрунту») і значно повільнішим в іншій частині простору істотно більшого обсягу [1–3].

Аргументом на користь аналітичних методів є також можливість отримання загальних закономірностей протікання фізичних процесів, встановити які, а тим паче обґрунтувати їхній загальний характер на основі чисельного вирішення великої кількості конкретних завдань, важко.

Метою статті є моделювання та аналіз тривимірних квазістаціонарних електромагнітних полів безконтактних індуктометрів, розміщених над електропровідним ґрунтом сільськогосподарського призначення.

2. Загальне рішення хвильової задачі для контуру зі змінним струмом у вигляді системи випромінюючих струмових диполів (модель безконтактного кондуктометра)

Використовуючи результати робіт [2, 3], електромагнітне поле контуру зі змінним струмом кінцевих розмірів визначатимемо як суперпозицію полів елементарних струмових диполів $\overline{t_m \cdot d\vec{l}}$ (рис. 1) розподілених уздовж контуру.

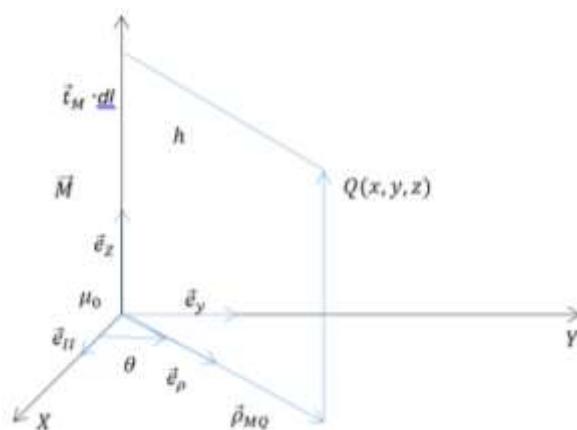


Рисунок 1 – Токовий диполь

Для цього спочатку наведемо розв'язання задачі знаходження поля відокремленого струмового диполя, розташованого над плоскою межею розділу середовищ із різними електрофізичними властивостями, докладно представлено в [4]. Саме ця модель адекватно описує взаємодію безконтактного кондуктометра з електропровідним ґрунтом сільськогосподарського призначення, що є напівпростором ($z < 0$) із плоскою

межею. Для отримання поля всього контуру рішення досить подати у вигляді контурного інтеграла від знайдених виразів для поля диполя. Незважаючи на те, що розв'язання задачі

викладено в літературі, тут із метою послідовного викладу матеріалу дано основні положення щодо знаходження аналітичного рішення.

Рівняння для потенціалів:

$$\begin{cases} z > 0: \Delta \vec{A}_e + k_e^2 \cdot \vec{A}_e = -\mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{j}_0, \Delta \varphi_e + k_e^2 \cdot \varphi_e = 0, \\ z < 0: \Delta \vec{A}_i + k_i^2 \cdot \vec{A}_i = 0, \Delta \varphi_i + k_i^2 \cdot \varphi_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} [\vec{e}_z \cdot (\vec{E}^+ - \vec{E}^-)] = 0, [\vec{e}_z \cdot (\vec{H}^+ - \vec{H}^-)] = \vec{j}_s, \\ [\vec{e}_z \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-)] = 0, [\vec{e}_z \cdot (\vec{J}_t^+ - \vec{J}_t^-)] = 0, \end{cases} \quad (2)$$

Електромагнітне поле на нескінченності згасає, тому задачу вирішують за умови рівності нулю векторного потенціалу в нескінченно віддалених точках:

$$[\vec{A}(\infty)] = 0. \quad (3)$$

Рівняння для потенціалів (1) і граничні умови (2), (3) для поля струмового диполя залишаються колишніми з тією відмінністю, що як джерело \vec{j}_0 виступає елемент струму $I_0 \cdot \delta(\vec{r}_m - \vec{r}) \cdot \vec{t}_M \cdot dl$ (рис. 2). Розглядається довільна орієнтація елемента струму щодо плоскої поверхні поділу середовищ. У цьому випадку одиничний вектор може бути представлений у вигляді двох проєкцій $\vec{t} = \vec{t}_{\parallel} + \vec{t}_{\perp}$, де \vec{t}_{\parallel} – проєкція на поверхню розділу середовищ («повітря-грунт»), \vec{t}_{\perp} – проєкція на вертикальну вісь.

Використовуємо локальну систему координат, пов'язану з елементом струму в такий спосіб. Центр системи координат (точка M_0) розташований на поверхні розділу середовищ, вертикальна вісь проходить через точку джерела $M(0, 0, h)$, вісь X обрана в напрямку проєкції \vec{t}_{\parallel} , що стосується поверхні розділу середовищ і яка характеризується одиничним вектором $\vec{e}_{\parallel} = \vec{t}_{\parallel} / |\vec{t}_{\parallel}|$. Крім локальної декартової системи координат використовуватимемо і локальну циліндричну систему з координатами (ρ, Θ, z) , показаними на рис. 2.

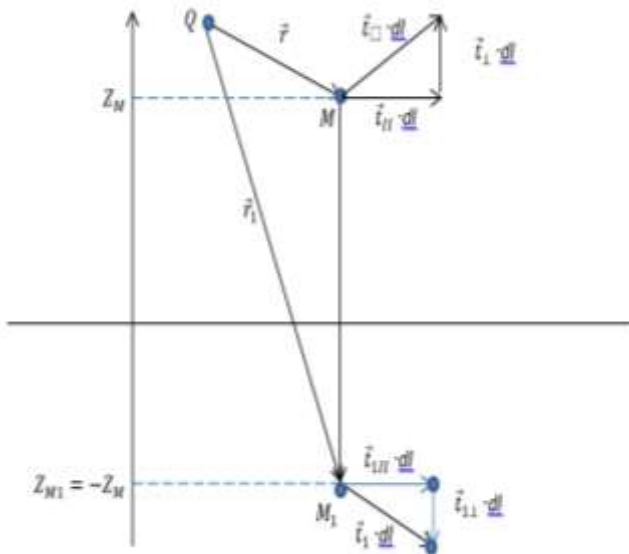


Рисунок 2 – Елемент контуру та його дзеркальне відображення від плоскої межі розділу середовищ

Розв'язання сформульованої хвильової задачі вдасться знайти в [4], якщо здійснити двовимірне перетворення Фур'є за координатами. Формула прямого перетворення Фур'є функції двох змінних $f(x, y)$ за координатами має вигляд

$$f^*(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot \exp[-i(\xi \cdot x + \eta \cdot y)] dx dy, \quad (4)$$

$i^2 = -1$ (i – уявна одиниця для цього перетворення).

При цьому диференціювання за координатними X - та Y -функціями оригіналів відповідає множення їх зображень $f^*(\xi, \eta)$ на оператори $i \cdot \xi$ і $i \cdot \eta$, відповідно.

Крім того, зображення δ -функції дорівнює постійній величині $1/(2\pi)$. Враховуючи ці обставини, після застосування до рівнянь (1) інтегрального перетворення (4) замість тривимірних рівнянь в оригіналах отримуємо вже одновимірні рівняння для зображень векторного потенціалу:

$$\begin{cases} z > 0: \frac{d^2 \vec{A}_e^*}{dz^2} - q_e^2 \cdot \vec{A}_e^* = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{4\pi^2} \cdot \delta(z-h) \cdot \vec{t}_M \cdot dl, \\ z < 0: \frac{d^2 \vec{A}_e^*}{dz^2} - q_i^2 \cdot \vec{A}_i^* = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $q^2 = \xi^2 + \eta^2 - k^2$, $h = z_M$ – вертикальна координата точки розташування струмового диполя. Крім координат ξ і η використовуватимемо перетворені полярні координати \tilde{Q} і ψ , для яких $\xi = \tilde{Q} \cdot \cos \psi$, $\eta = \tilde{Q} \cdot \sin \psi$. При цьому величини, що входять (5), набувають вигляду

$$q_e^2 = \tilde{\Theta}^2 - k_e^2, q_i^2 = \tilde{\Theta}^2 - k_i^2. \quad (6)$$

Далі сформуємо задачу знаходження рішення для зображень векторного потенціалу окремо для горизонтальної $\vec{t}_{\parallel} \cdot dl$ та вертикальної $\vec{t}_{\perp} \cdot dl$ компонент струмового диполя. Для кожної компоненти завдання формулюється у вигляді звичайного диференціального рівняння другого порядку для зображень векторного потенціалу та граничних умов, виражених через зображення векторного потенціалу, а також враховані умови загасання поля на нескінченності:

$$\vec{A}_e^*(z \rightarrow \infty) = \vec{A}_i^*(z \rightarrow -\infty) = 0. \quad (7)$$

Для горизонтальної складової струмового диполя $\vec{t}_{\parallel} \cdot dl$, яка орієнтована паралельно осі ОХ, компонента $A_y^* = 0$, а для інших компонент (A_x^* , A_z^*) завдання формулюється таким чином [4]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_x^*}{dz^2} - q^2 \cdot A_x^* = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{4\pi^2} \cdot \delta(z-h) \cdot (\vec{t}_M \cdot \vec{e}_{\parallel}) dl, \\ \frac{d^2 A_z^*}{dz^2} - q^2 \cdot A_z^* = 0, \\ A_{xe}^* = A_{xi}^*, \quad \frac{dA_{xe}^*}{dz} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dA_{xi}^*}{dz}, \\ \frac{dA_{ze}^*}{dz} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dA_{zi}^*}{dz}, \quad \frac{1}{k_e^2} \left(\frac{dA_{ze}^*}{dz} + i \cdot \xi \cdot A_{xe}^* \right) = \frac{1}{k_i^2} \left(\frac{dA_{zi}^*}{dz} + i \cdot \xi \cdot A_{xi}^* \right). \end{cases} \quad (8)$$

Для вертикальної складової струмового диполя $\vec{t}_{\perp} \cdot dl$ дві компоненти векторного потенціалу дорівнюють нулю. $A_x^* = A_y^* = 0$. Завдання для вертикальної перетвореної компоненти A_z^* також легко сформулювати, виходячи із загальних рівнянь (1) та граничних умов (15), переписаних для перетворених компонентів поля і виражених через відповідну компоненту векторного потенціалу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_z^*}{dz^2} - q^2 \cdot A_z^* = -\frac{\mu_0 \cdot I_0}{4\pi^2} \cdot \delta(z-h) \cdot (\vec{t}_M \cdot \vec{e}_z) dl, \\ A_{ze}^* = \frac{1}{\mu} \cdot A_{zi}^*, \quad \frac{dA_{ze}^*}{dz} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dA_{zi}^*}{dz}, \quad \frac{1}{k_e^2} \cdot \frac{dA_{ze}^*}{dz} = \frac{1}{k_i^2} \cdot \frac{dA_{zi}^*}{dz}. \end{cases} \quad (9)$$

В (8) і (9) для скорочення використано один загальний запис диференціальних рівнянь у діелектричному (повітря) та електропровідному середовищі (під електропровідним середовищем розуміється ґрунт сільськогосподарського призначення).

Обидва завдання (8) та (9) для компонент струмового диполя з урахуванням умови на нескінченності (7) мають просте аналітичне рішення [4]. Перехід до виразів електрома-

гнітного поля контуру кінцевих розмірів на основі принципу суперпозиції здійснюється простим інтегруванням поля диполя по точках витоку M вздовж контуру.

Потім це рішення для Фур'є – зображень векторного потенціалу у вигляді інтеграла по контуру записується окремо в діелектричному (повітря) $z > 0$ та електропровідному $z < 0$ середовищах таким чином:

$$z > 0 : \vec{A}_e^* = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{4\pi^2} \cdot \oint_l \left\{ \frac{\exp[-q_e \cdot (z - z_M)]}{2 \cdot q_e} \cdot \vec{t} - \frac{\exp[-q_e \cdot (z - z_{M1})]}{2 \cdot q_e} \cdot \vec{t}_1 + Y_{e\parallel}^* \cdot \vec{t}_{\parallel} + Y_{e1}^* \cdot (\vec{t} \cdot \vec{e}_{\parallel}) \cdot \vec{e}_z + Y_{e2}^* \cdot \vec{t}_{\perp} \right\} dl, \quad (10)$$

$$z < 0 : \vec{A}_i^* = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{4\pi^2} \cdot \oint_e \{ Y_{i\parallel}^* \cdot \vec{t}_{\parallel} + Y_{i1}^* \cdot (\vec{t} \cdot \vec{e}_{\parallel}) \cdot \vec{e}_z + Y_{i2}^* \cdot \vec{t}_{\perp} \} de. \quad (11)$$

У виразах (10), (11), крім точок витоку на вихідному контурі, використовуються і точки на контурі 8, дзеркально відбитому від плоскої межі розділу середовищ. Елементи вихідного та дзеркально відбитого контурів показані на рис. 2. Тут \vec{t} і \vec{t}_1 – поодинокі вектори, дотичні відповідно до вихідного контуру в точці M , і контуру, дзеркально відбитому від межі розділу середовищ, у точці M_1 . Вектори мають однакові за величиною \vec{t} і \vec{t}_1 протилежні за напрямком проєкції на вертикальну вісь $\vec{t}_{1\perp} = -\vec{t}_{\perp}$ і однакові за величиною і напрямком проєкції на поверхню розділу середовищ $\vec{t}_{1\parallel} = \vec{t}_{\parallel}$, $\vec{t}_1 = -\vec{t}_{\perp} + \vec{t}_{\parallel}$, тобто $\vec{t} = \vec{t}_{\perp} + \vec{t}_{\parallel}$.

Зазначимо, що у даному випадку величина вертикального компонента векторного потенціалу A_z^* є сума горизонтальної складової струмового диполя рівняння (5) і його вертикальна складова рівняння (6). У наведеному рішенні (10), (11) виділено відповідні доданки. В області $z > 0$ у виразі (10) функція Y_{e1}^* пов'язана з перебігом струму в горизонтальному напрямку, а функція Y_{e2}^* – з перебігом струму у вертикальному напрямку. Аналогічним чином зазначені функції для доданків вертикальної компоненти векторного потенціалу в області $z < 0$ виразу (8).

Підінтегральні функції (10) при $z > 0$ мають такий вигляд:

$$\begin{cases} Y_{e\parallel}^* = \frac{\mu \cdot \exp[-q_e \cdot (z - z_{M1})]}{\mu \cdot q_e + q_i}, & Y_{e1}^* = i \cdot \tilde{Q} \cdot \cos\psi \cdot \frac{(\mu \cdot \tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_e) \cdot \exp[-q_e \cdot (z - z_{M1})]}{(\mu \cdot q_e + q_i) \cdot (q_e \cdot \tilde{\gamma}_i + q_i \cdot \tilde{\gamma}_e)}, \\ Y_{e2}^* = -\frac{q_1 \cdot \tilde{\gamma}_e \cdot \exp[-q_e \cdot (z - z_{M1})]}{q_e (q_e \cdot \tilde{\gamma}_i + q_i \cdot \tilde{\gamma}_e)}. \end{cases} \quad (12)$$

В області $z < 0$ підінтегральні функції у рішенні для Фур'є-образів такі:

$$\begin{cases} Y_{i\parallel}^* = \frac{\mu \cdot \exp[q_i \cdot z - q_e \cdot z_M]}{(\mu \cdot q_e + q_i)}, & Y_{i1}^* = i \cdot \tilde{\Theta} \cdot \cos\psi \cdot \frac{\mu \cdot (\mu \cdot \tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_e) \cdot \exp[q_i \cdot z - q_e \cdot z_M]}{(\mu \cdot q_e + q_i) \cdot (q_e \cdot \tilde{\gamma}_i + q_i \cdot \tilde{\gamma}_e)}, \\ Y_{iz}^* = \frac{\mu \cdot \tilde{\gamma}_i \cdot \exp[q_i \cdot z - q_e \cdot z_M]}{(q_e \cdot \tilde{\gamma}_i + q_i \cdot \tilde{\gamma}_e)}. \end{cases} \quad (13)$$

Для отримання рішення щодо фізичних змінних необхідно здійснити зворотне перетворення за координатами відповідно до виразу

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, \eta) \cdot \exp[i \cdot (\xi \cdot x + \eta \cdot y)] d\xi dy = \\ &= \int_0^{\infty} f_1^*(\tilde{\Theta}) [\int_{-\pi}^{\pi} f_2^*(\psi) \cdot \exp[i \cdot \tilde{\Theta} \cdot \rho \cdot \cos(\psi - \tilde{\Theta})] d\psi] \tilde{\Theta} d\tilde{\Theta}, \end{aligned} \quad (14)$$

де підінтегральна функція, якою виступає будь-яке з доданків в (12) і (13), у даному випадку має вигляд $f^*(\xi, \eta) = f_1^*(\tilde{\Theta}) \cdot f_2^*(\psi)$. Для цих функцій інтегрування по (14) дає [10] для $f^*(\xi, \eta) = f_1^*(\tilde{\Theta})$:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_0^{\infty} f_1^*(\tilde{\theta}) \cdot \left[\int_{-\pi}^{\pi} \exp[i \cdot \tilde{\theta} \cdot \rho \cdot \cos(\psi - \tilde{\theta})] d\psi \right] \tilde{\theta} d\tilde{\theta} = \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\infty} f_1^*(\tilde{\theta}) I_0(\tilde{\theta} \cdot \rho) \cdot \tilde{\theta} \cdot d\tilde{\theta};
\end{aligned} \tag{15}$$

для $f^*(\xi, \eta) = f_1^*(\tilde{\theta}) \cdot \cos\psi$:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_0^{\infty} f_1^*(\tilde{\theta}) \cdot \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos\psi \cdot \exp[i \cdot \tilde{\theta} \cdot \rho \cdot \cos(\psi - \tilde{\theta})] d\psi \right] \tilde{\theta} d\tilde{\theta} = \\
&= (-2 \cdot \pi) \cdot \cos\theta \int_0^{\infty} f_1^*(\tilde{\theta}) \cdot I_1(\tilde{\theta} \cdot \rho) \tilde{\theta} d\tilde{\theta}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Тут $I_0(\tilde{\theta} \cdot \rho) - I_1(\tilde{\theta} \cdot \rho)$ функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку відповідно.

Конкретні вирази для векторного потенціалу хвильового електромагнітного поля після виконання зворотного перетворення Фур'є згідно з (15), (16) представлені в [4]. Однак у даному дослідженні аналізується квазістаціонарне поле, тому вирази у фізичних координатах для таких полів уявімо після необхідних додаткових перетворень, які враховують особливості квазістаціонарної постановки задачі.

2.2. Квазістаціонарне електромагнітне поле довільного контуру зі змінним струмом: нехтування струмами усунення у всьому просторі

2.2.1. Формулювання завдання сполучення для електромагнітного поля гармонійного струму довільного контуру

Квазістаціонарна постановка передбачає виконання двох обмежень: по-перше, довжина хвилі електромагнітного поля λ значно більша за будь-який характерний розмір L -електромагнітної системи: $\lambda = (2\pi)/\omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \gg L$; по-друге, у рівнянні повного струму нехтують щільністю струму зміщення \vec{j}_D порівняно з щільністю струму провідності j [4].

У цьому розділі дослідження, як завжди, при переході до квазістаціонарного завдання будемо нехтувати струмами зміщення не тільки в електропровідному, але і в діелектричному середовищі. Тоді параметри $\tilde{\gamma}_i = \gamma$ і $k_i^2 = -i \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \gamma$, відмінні від нуля в області $z < 0$ і k_e^2 , дорівнюють нулю $\tilde{\gamma}_e = 0 = 0$ в діелектричному напівпросторі $z > 0$.

Умови калібрування Лоренца (4) у різних середовищах набувають вигляду

$$\begin{cases} z > 0: \operatorname{div} \vec{A}_e = 0, \\ z < 0: \operatorname{div} \vec{A}_i + \mu \cdot \mu_0 \cdot \gamma \cdot \varphi_i = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Зауважимо, що у розглянутій постановці в діелектричному середовищі $z > 0$ калібрування Лоренца збігається з калібруванням Кулона.

Рівняння для потенціалів виявляються такими:

$$\begin{cases} z > 0: \Delta \vec{A}_e = -\mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{j}_0, \Delta \varphi_l = 0, \\ z < 0: \Delta \vec{A}_i - \mu \cdot \mu_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial t} = 0, \Delta \varphi_i - \mu \cdot \mu_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{18}$$

Δ – оператор Лапласа.

На поверхні розділу середовищ для нормальної компоненти напруженості електричного поля у квазістаціонарній постановці при нехтуванні струмами усунення в усьому

просторі виконуються такі умови. В електропровідному середовищі нормальна компонента напруженості електричного поля на межі провідника дорівнює нулю:

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{E}^-) = 0. \quad (19)$$

У даному випадку це є наслідком рівності нуля та щільності струму в електричному середовищі і, відповідно, рівності нулю нормальній компоненті щільності струму, а, отже, і напруженості електричного поля у провіднику на його межі.

У діелектричному середовищі на основі електричної теореми Гауса при виконанні (15) нормальна компонента напруженості електричного поля пов'язана з поверхневою щільністю електричного заряду співвідношенням

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{E}^+) = \frac{\delta}{\epsilon_e \cdot \epsilon_0}. \quad (20)$$

На підставі (16) в електропровідному середовищі, де $y \neq 0$ для вирішення задачі достатньо знайти розподіл векторного потенціалу. Однак у діелектричному середовищі величина скалярного потенціалу залишається невизначеною. Скалярний потенціал не входить в умову калібрування (16), а нормальна компонента поля на плоскій межі (16) визначається через невідому поверхневу щільність заряду δ . У цьому випадку, використовуючи тільки векторний потенціал, напруженість електричного поля (16) може бути визначена з точністю до потенційного доданку.

На зазначену властивість завдання сполучення у квазістаціонарній постановці при нехтуванні струмами усунення, у тому числі і в діелектричній області, звертають увагу автори роботи [4], в якій показано, що рішення буде однозначним при заданні додаткових умов. Відсутність потенційної складової є несуттєвою, якщо необхідно знати розподіл індукції магнітного поля $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ або Е.Д.С., що індукується у замкнутому контурі. (Е.Д.С. – електрорушійна сила). Однак знаходження напруженості електричного поля з урахуванням потенційної складової стає необхідним, наприклад, щодо локальних силових характеристик дії електричного поля, щільності потоку енергії електромагнітного поля $\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$ і в ряді інших прикладів.

При виконанні зворотного перетворення Фур'є за координатами у квазістаціонарному наближенні необхідно враховувати, що $q_e = \tilde{\Theta}, q_i = \sqrt{\tilde{\Theta}^2 + i \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \gamma}$. У цьому випадку, використовуючи (15), інтеграли для перших двох доданків рівняння (10) є табличними [1] і вирази щодо фізичних координат мають вигляд [9]

$$\begin{cases} \int_0^\infty \frac{\exp[-\tilde{\Theta} \cdot (z-z_M)]}{2 \cdot \tilde{\Theta}} \cdot I_0(\tilde{\Theta} \cdot \rho) \cdot \tilde{\Theta} d\tilde{\Theta} = \pi \cdot \frac{1}{r}, \\ \int_0^\infty \frac{\exp[-\tilde{Q} \cdot (z-z_M)]}{2 \cdot \tilde{\Theta}} \cdot I_0(\tilde{\Theta} \cdot \rho) \cdot \tilde{\Theta} d\tilde{\Theta} = \pi \cdot \frac{1}{r_1}. \end{cases} \quad (21)$$

Тут r і r_1 – відстані між точкою спостереження Q , точками витоку на вихідному контурі M та його дзеркальному відображенні M_1 .

У свою чергу, застосування зворотного перетворення Фур'є для доданків, що містять функції $Y_{||}^*$, Y_1^* та Y_2^* в (10) та (11), в яких виключені члени, пов'язані зі струмами зміщення, дозволяє знайти результат інтегрування у вигляді аналітичних залежностей лише по кутку ψ .

У діелектричній області $z > 0$ маємо

$$\begin{cases} Y_{e11} = 2\pi \cdot \int_0^\infty \frac{\exp[-\tilde{\Theta} \cdot (z - z_{M1})]}{[I_0(\tilde{\Theta} \cdot \rho)]^{-1} \cdot W(\tilde{\Theta})} \cdot \tilde{\Theta} \cdot d\tilde{\Theta}, Y_{e2} = 0, \\ Y_{e1} = 2 \cdot \pi \cdot \cos\Theta \cdot \int_0^\infty \frac{\exp[-\tilde{\Theta} \cdot (z - z_M)] \cdot I_1(\tilde{\Theta} \cdot \rho)}{W(\tilde{\Theta})} \cdot \tilde{\Theta} \cdot d\tilde{\Theta}. \end{cases} \quad (22)$$

Для електропровідного середовища $z < 0$ знаходимо

$$\begin{cases} Y_{i11} = 2\pi \cdot \int_0^\infty \frac{\exp[q_i \cdot z - \tilde{\Theta} \cdot z_M] \cdot I_0(\tilde{\Theta} \cdot \rho)}{W(\tilde{\Theta})} \cdot \tilde{\Theta} d\tilde{\Theta}, \\ Y_{i1} = -2\pi \cdot \mu \cdot \cos\Theta \cdot \int_0^\infty \frac{\exp[q_i \cdot z - \tilde{\Theta} \cdot z_M] \cdot I_1(\tilde{\Theta} \cdot \rho)}{W(\tilde{\Theta})} \cdot \tilde{\Theta} d\tilde{\Theta}, \\ Y_{i2} = 2\pi \cdot \mu \cdot \int_0^\infty \exp[q_i \cdot z - \tilde{\Theta} \cdot z_M] \cdot I_0(\tilde{\Theta} \cdot \rho) d\tilde{\Theta}. \end{cases} \quad (23)$$

Тут позначено $w(\tilde{\Theta}) = \frac{\mu \cdot \tilde{\Theta} + q_i}{\mu} = \tilde{\Theta} + \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{\tilde{\Theta}^2 + i \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \gamma}$.

У результаті, підставляючи (12), (13) замість Фур'є-образів їх вираження у фізичних координатах (20)–(23), отримуємо явні вирази у вигляді квадатур для визначення в усьому просторі векторного потенціалу тривимірного потенціалу, який гармонійно змінюється в часі електромагнітного поля.

3. Висновок

Отже, отримані закономірності дозволяють провести моделювання та аналіз тривимірних квазістаціонарних електромагнітних полів безконтактних індуктометрів, розміщених над електропровідним ґрунтом господарського призначення у різних електропровідних середовищах.

Визначено властивість сполучення у квазістаціонарній постановці при нехтуванні струмами усунення, у тому числі і в діелектричній області.

Встановлено, що відсутність потенційної складової є несуттєвою, що індукується у замкнутому контурі. Однак знаходження напруженості електричного поля з урахуванням потенційної складової стає необхідним, наприклад, щодо локальних силових характеристик дії електричного поля, щільності потоку енергії електромагнітного поля.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Васецкий Ю.М. Электромагнитное поле импульсного тока, протекающего над проводящим полупространством. Киев: Институт электродинамики, 1992. 37 с. (Препринт. НАН Украины, Институт электродинамики; № 721).
2. Vasetsky Yu.M., Dziba K.K. Three – Dimensional Quasi-Stationary Electromagnetic Field created by arbitrary Current Contour Near Conducting Body. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 1. С. 3–12.
3. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техника, 1974. 352 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Стаття надійшла до редакції 14.04.2022