https://orcid.org/0000-0001-5183-9090
https://orcid.org/0000-0001-6951-4091

УДК 519.61:621.3

В.П. ВОЛОБОЄВ*, В.П. КЛИМЕНКО*

ДО ПИТАННЯ ПРО ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК МАТРИЦІ, БЛИЗЬКОЇ ДО ВИРОДЖЕННЯ, ТА СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ОПИСУЄ ФІЗИЧНИЙ ОБ'ЄКТ

*Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ, Україна

Анотація. *Прийнято вважати, що близькість матриці до виродження однозначно визначає нестійкість системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Є лише припущення, що нестійкість чисельного розв'язання СЛАР у разі матриці, близької до виродження, породжує помилка округлення арифметичної операції додавання (віднімання). При визначенні механізму зв'язку матриці, близької до виродження, та розв'язності СЛАР, як модельний приклад аналізуються всі етапи розрахунку електричного ланцюга, а саме опис графа лінійного електричного ланцюга, складання СЛАР, що описує ланцюг, і рішення складеної системи. Вперше запропоновано провідність двополюсного компонента, розташованого між вузлами графа електричного ланцюга, використовувати як індикатор матриці, близької до виродження. Для двох варіантів входження напруги та провідності компонента індикатора у СЛАР розрахована залежність точності рішення СЛАР від значення провідності компонента індикатора. Аналіз результатів розрахунку вперше показав, що помилка округлення арифметичної операції додавання (віднімання) призводить до втрати точності або нестійкості чисельного рішення СЛАР із матрицею, близькою до виродження. Вплив помилки на обчислювальний процес чисельного вирішення системи виконується у два етапи. Вперше встановлено, що зв'язок між матрицею, близькою до виродження, і стійкістю рішення СЛАР залежить від вибору напруги компонента індикатора у векторі змінних СЛАР на етапі складання рівнянь, що описують електричний ланцюг. Зв'язок існує, якщо напруга компонента індикатора не входить у вектор змінних. Зв'язок не існує, якщо напруга компонента індикатора входить у вектор змінних, оскільки не працює другий етап функціонування помилки округлення. Пропонується алгоритм вибору змінних СЛАР, що складається, для отримання стійкого рішення системи.*

Ключові слова: *система лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця, близька до виродження, роздільна здатність системи рівнянь, електричний ланцюг, граф, провідність, компонент, індикатор матриці близької до виродження, помилка округлення операції складання (віднімання).*

Abstract. *It is generally accepted that the proximity of the matrix to degeneracy uniquely determines the instability of the system of linear algebraic equations (SLAE). There is only an assumption that the instability of the numerical solution of the SLAE in the case of a matrix close to degeneracy is caused by the rounding error of the arithmetic operation of addition (subtraction). When determining the mechanism of the interrelation of the matrix close to degeneracy and the solvability of the SLAE, as a model example, all stages of the calculation of the electric circuit are analyzed, namely, the description of the graph of the linear electric circuit, the composition of the SLAE describing the circuit, and the solution of the complex system. For the first time, it was proposed to use the conductivity of the bipolar component located between the nodes of the electric circuit graph as an «indicator» of the matrix close to degeneracy. The dependence of the accuracy of the SLAE solution on the value of the conductivity of the indicator component was calculated for two variants of the voltage and conductivity of the indicator component in the SLAE. The analysis of the calculation results showed for the first time that the rounding error of the arithmetic operation of addition (subtraction) leads to the loss of accuracy or instability of the numerical solution of the SLAE with the matrix close to degeneracy. The influence of the error on the computational process of the numerical solution of the system was performed in two stages. For the first time, it was established*

that the interrelation between the matrix close to degeneracy and the stability of the SLAE solution depends on the selection of the voltage of the indicator component in the vector of SLAR variables at the stage of compiling the equations describing the electrical circuit. The interrelation exists if the voltage of the indicator component is not included in the vector of variables and does not exist if the voltage of the «indicator» component is included in the vector of variables because the second rounding error operation stage does not work. An algorithm for selecting the variables of the SLAE, which is composed, is proposed to obtain a stable solution for the system.
Keywords: *system of linear algebraic equations, matrix close to degeneracy, resolution of a system of equations, electric circuit, graph, conductivity, component, indicator of a matrix close to degeneracy, rounding error of addition (subtraction) operation.*

DOI: 10.34121/1028-9763-2024-2-78-88

1. Вступ

Багато завдань моделювання фізичних (технічних) об'єктів зводяться до рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Оскільки всі обчислення при рішенні таких систем виконуються з кінцевим числом значущих цифр, то точність рішення може сильно втрачатися через похибки округлення. У цьому випадку некоректно поставленим завданням або погано обумовленою (нестійкою) системою прийнято вважати те завдання, яке при фіксованому рівні похибок вхідних даних і обчислень із кінцевим числом значущих цифр не гарантує в рішенні ніякої точності. При цьому вважається, що модель і опис моделі фізичного (технічного) об'єкта коректні.

Як показує аналіз науково-технічної літератури, розробка методів рішення проблемних СЛАР розглядається як чисто математичне завдання. Це означає, що достовірність результатів залежить тільки від використовуваних методів вирішення і обчислювальних засобів і не залежить від наукового інтелекту користувача і його розуміння розв'язуваної задачі, як це було в докомп'ютерну епоху.

Метою статті є дослідження механізму виникнення нестійкості рішення СЛАР, що описує фізичний (технічний) об'єкт. Дослідження механізму буде здійснюватися на всіх етапах моделювання фізичного об'єкта, а саме опис фізичного лінійного об'єкта, складання лінійної системи рівнянь, що описують об'єкт, та рішення складеної системи рівнянь.

2. Постановка проблеми

З аналізу науково-технічної літератури випливає, що найбільш повно розглянуто широке коло питань, пов'язаних із методами чисельного розв'язання СЛАР у працях В.В. Воєводіна. У них досліджені основні чисельні методи рішення СЛАР із невиродженими і прямокутними матрицями повного рангу. Запропоновано інструмент, за допомогою якого проводиться оцінка впливу помилок округлення, що виникають при виконанні арифметичних операцій, на точність чисельного рішення СЛАР. Наведено порівняльну характеристику методів по точності рішення систем і ряду інших параметрів. Особлива увага приділена дослідженню особливостей нестійкості рішення СЛАР.

Сформульовано причину цього явища, що полягає в тому, що труднощі рішення нестійких систем пов'язані із труднощами рішення систем із матрицями, близькими до виродження або неповного рангу. Як індикатор нестійкості рішення використовується обумовленість матриці СЛАР. Обумовленість оцінює близькість до виродження матриці і тим самим нестійкість рішення, а число обумовленості є якісною оцінкою нестійкості рішення системи, але не вказує причину виникнення нестійкості. Основна увага приділена розробці стійких методів рішення таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь загального виду.

Варто помітити, що при оцінці точності рішення системи враховується тільки помилка округлення, що виникає при виконанні арифметичної операції, але, виявляється, є ще й інший тип помилки округлення, а саме операція додавання (віднімання) чисел із плаваючою комою має помилку округлення, що містить кінцеве число ненульових розрядів. Число цих розрядів визначається величиною чисел, що беруть участь в операції, і не залежить від числа розрядів, відведених для надання мантиси. Вплив цієї помилки на точність рішення СЛАР практично не досліджено. Є тільки згадування про неї [1].

У літературі не розкрито поняття матриці, близької до виродження. Тільки зазначено, що це поняття означає близьке до нуля значення змінної системи рівнянь.

Надалі розглядатиметься клас СЛАР, який описує поведінку фізичного об’єкта. У цьому разі первинним будуть структура і параметри фізичного об’єкта, а значення елементів матриці системи рівнянь, яка описує об’єкт, вторинні. Це означає, що розкриття поняття матриці, близької до виродження, слід шукати на рівні опису фізичного об'єкта.

3. Оцінка впливу помилки округлення операції складання (віднімання) на точність розв’язання системи рівнянь, що описує фізичний об’єкт

3.1. Вибір фізичного об’єкта на дослідження

При виборі фізичного об’єкта на дослідження враховувалися такі чинники. Графічне уявлення фізичного об’єкта має відповідати вимогам теорії графів. Існує добре розроблений математичний інструментарій опису фізичного об’єкта у вигляді СЛАР. Цим вимогам задовольняє теорія електричних кіл. На рис. 1 наведено електричний ланцюг [2] — аналог фрагмента лінійного одновимірного рівняння у приватних похідних другого порядку. Як випливає з рисунку, електричний ланцюг відображається у вигляді графа [3]. Для складання опису електричних кіл існує розвинений математичний апарат теорії електричних кіл [4].

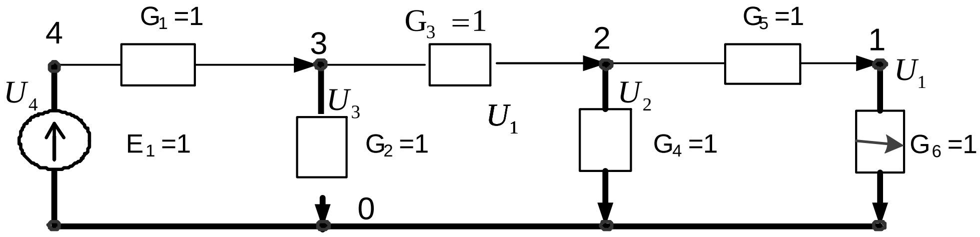

Рисунок 1 — Електричний ланцюг

Граф електричного ланцюга містить лише двополюсні компоненти, розташовані між вузлами графа. Наступні позначення наведені на рис. 1: U_1, U_2, U_3, U_4 — вузлові потенціали електричного ланцюга відраховуються від базового вузла 0 і збігаються з напругами $U_{E_1}, U_{G_2}, U_{G_4}, U_{G_6}$ компонентів E_1, G_2, G_4, G_6. E_1 — джерело напруги (зовнішній вплив). Напруги $\mathrm{U}_{\mathrm{G}_1}$, $\mathrm{U}_{\mathrm{G}_3}$, $\mathrm{U}_{\mathrm{G}_5}$ компонентів G_1, G_3, G_5 не входять у вузлові потенціали. Зв’язок між струмами та напругами компонентів описується рівнянням

$$I = GU, \tag{1}$$

де U — вектор напруги компонента, I — вектор струму компонента, G — вектор провідності компонента.

Матриці, близькій до виродження СЛАР, що описує електричний ланцюг, відповідає граф, близький до виродження. Це означає, що напруга на одному з компонентів графа наближається до нуля, а вузли графа, що з'єднують цей компонент, прагнуть злитися в один. Напруги компонентів стають відомі тільки після чисельного рішення СЛАР, тому, як випливає з формули (1), провідність компонента слід розглядати як якісну оцінку близькості графа до виродження. Індикатором матриці, тобто мірою, близькою до виродження, вважається той компонент провідності, у якого значно більше провідності інших компонентів електричного ланцюга.

Складання опису електричного ланцюга розглядається нижче.

3.2. Математичний опис електричного ланцюга

При комп'ютерному моделюванні електричних ланцюгів застосовується метод вузлових потенціалів. Як змінні складені рівняння виступають вузлові потенціали. Простий алгоритм формалізованого складання рівнянь ланцюга та слабко заповнена матриця лінійних рівнянь, що описують ланцюг, є суттєвою перевагою перед іншими методами опису. Слід зазначити, що якщо провести аналіз методів опису об'єктів у фізиці, то виявиться, що всі вони використовують змінні, які відліковуються від базової точки. Це означає, що дискретним аналогам рівнянь, що описують об'єкти фізики, можуть бути притаманні ті ж проблеми, що й системі рівнянь, складеної методом вузлових потенціалів.

У зв'язку з тим, що є великий список літератури з різних аспектів застосування методу вузлових потенціалів [2–4], наводиться лише система рівнянь, яка описує електричний ланцюг (рис. 1).

$$\begin{vmatrix} G_5+G_6 & -G_5 & 0 \\ -G_5 & G_3+G_4+G_5 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1E_1 \end{vmatrix} . \qquad (2)$$

Змінними СЛАР є вузлові потенціали U_1, U_2, U_3 електричного ланцюга. Елементи матриці СЛАР (2) наведені у загальному вигляді, який показує їх зв'язок із параметрами компонентів електричного ланцюга. З аналізу зв'язку випливає:

1. Вимірювання параметрів компонент електричного ланцюга з деякою похибкою означає, що буде розраховуватися той самий електричний ланцюг, але з виміряними параметрами, тобто це не призводить до порушення фізичного функціонування електричного ланцюга.

2. Розташування параметрів компонент у матриці СЛАР є результат складання рівнянь методом вузлових потенціалів. Два варіанти входження параметрів компонент електричного ланцюга в елементи матриці:

Перший варіант:

– напруги компонент G_3, G_5 не входять до числа змінних СЛАР, напруга компонента G_3 є різниця вузлових потенціалів U_3, U_2, а напруга компонента G_5 є різниця вузлових потенціалів U_2, U_1;

– параметри компонентів G_3, G G35 входять до діагональних і недіагональних елементів матриці.

Другий варіант:

– напруги компонентів $\mathbf{G_2}$**,** $\mathbf{G_4}$ $\mathbf{G_6}$ входять до числа змінних СЛАР;

– напруги компонентів $\mathbf{G_2}$**,** $\mathbf{G_4}$ $\mathbf{G_6}$ є вузлові потенціали U_3, U_2, U G_{31};

– параметри компонентів входять до діагональних елементів матриці СЛАР.

3. Значення помилки округлення арифметичної операції додавання (віднімання) залежить від різниці порядків параметрів компонентів електричного ланцюга.

4. Як індикатор близькості матриці СЛАР до виродження має максимальне значення серед усіх параметрів компонентів електричного ланцюга. Чим більше відношення максимального значення параметра компонента до мінімального, тим ближче матриця до виродження.

Далі буде виконано розрахунок залежності точності розв'язання системи рівнянь від різниці порядків значень параметрів компонентів електричного ланцюга.

3.3. Дослідження залежності точності розв'язання системи рівнянь від міри близькості до виродження матриці

Дослідження залежності точності розв'язання системи рівнянь від міри близькості до виродження матриці містить оцінку впливу помилки округлення елементарних арифметичних операцій на точність чисельного рішення СЛАР. Для цього виконано контрольний розрахунок СЛАР при наступному наборі параметрів компонентів G_1=G_2=G_3=G_4=G^5=G_6=1,0 см, E_1=1,0 в.

Як міра близькості до виродження матриці системи застосовується діапазон різниці значень параметрів компонентів електричного ланцюга, а як індикатор міри, близької до виродження матриці, компонент G_3. Розрахунок точності чисельного рішення СЛАР виконується для двох варіантів розташування компонента $\mathbf{G_3}$ в елементах матриці. В першому варіанті параметр компонента G_3 входить як у діагональні, так і недіагональні елементи матриці, а напруга компонента G_3 не входить до змінних системи. У другому варіанті параметр компонента G_3 входить у діагональний елемент матриці, а напруга компонента G_3 входить до змінних системи. Напруга компонента G_3, розташованого між вузлами 2 і 3, не відноситься до вузлових потенціалів, тому СЛАР (2) необхідно перетворити таким чином, щоб напруга компонента U_{G3} увійшла до змінних системи. Як випливає з рис. 1, вузлова напруга U_2 пов'язана з напругою компонента U_{G3} як

$$U_2 = U_3 - U_{G3} \tag{3}$$

і після нескладних перетворень СЛАР (2) отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{vmatrix} G_5+G_6 & G_5 & -G_5 \\ G_5 & G_3+G_4+G_5 & -(G_4+G_5) \\ -G_5 & -(G_4+G_5) & G_1+G_2+G_4+G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 U_{E_1} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Метод Гауса було обрано для чисельного розв'язання системи рівнянь (2), (4). У програмі для посилення впливу помилки округлення складання (віднімання) на точність розв'язання системи рівнянь арифметичні операції виконуються з одинарною точністю. У цьому випадку мантиса числа із плаваючою комою містить 8 значних десяткових цифр, а допустимий діапазон значень параметрів компонентів вибрано не більше 8. Нестійкість СЛАР визначається за точністю чисельного рішення СЛАР. Точність розв'язання систем рівнянь оцінюється за нев'язкою (похибкою), що обчислюється для СЛАР (2), за такою формулою:

$$\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_5+G_6 & -G_5 & 0 \\ -G_5 & G_3+G_4+G_5 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 E_1 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

для СЛАР (4) за формулою

$$\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_5+G_6 & G_5 & -G_5 \\ G_5 & G_3+G_4+G_5 & -(G_4+G_5) \\ -G_5 & -(G_4+G_5) & G_1+G_2+G_4+G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 U_{E_1} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

де f_i $i=1, 2, 3$ $й=1, 2, 3$ — похибка i-ого рівняння СЛАР;

U_i $i=1, 2, 3$ — розрахована i-та змінна СЛАР (2);

U_1, U_{G3}, U_3 — розраховані змінні СЛАР (4).

Результати розрахунку залежності похибки рішення систем від зміни значення параметра компонента G_3 наведені в табл. 1 і 2.

Таблиця 1 — Результати чисельного розрахунку СЛАР (2) і похибки (5) залежно від зміни значення параметра компонента G_3

0	1	2	3	4	5	6	7
‘	G_3	1,0	1,0e+3	1,0e+5	1,0e+6	1,0e+7	1,0e+8
2	U_3	0,38461539	0,28589845	0,28554809	0,28652343	0,26398185	1,#INF000
3	U_2	0,15384616	0,28547025	0,28554380	0,28652301	0,26398179	1,#INF000
4	U_1	0,076923080	0,14273512	0,14277190	0,14326151	0,13199089	0,28571430
5	f_3	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	-1,#IND00
6	f_2	7,4505806e-009	5,6028366e-006	-0,00083774328	0,012552008	-0,20007376	-1,#IND00
7	f_1	-1,4901161e-008	3,3378601e-006	-0,00024962425	0,0097206235	-0,12401015	-1,#IND00

Таблиця 2 — Результати чисельного розрахунку СЛАР (4) і похибки (6) залежно від зміни значення параметра компонента G_3

0	1	2	3	4	5	6	7
1	G^3	1,0	1,0e+3	1,0e+5	1,0e+6	1,0e+7	1,0e+8
2	U_3	0,38361539	0,33344433	0,33333445	0,33344433	0,33333445	0,33333334
3	U_{G3}	0,15384616	0,00033294491	3,3332944 e-006	0,00033294491	3,3332944 e-006	3,3333334 e-009
4	U_1	0,076923080	0,00016647246	1,6666472 e-006	0,00016647246	1,6666472 e-006	1,6666667 e-009
5	f_3	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0.00000000
6	f_2	7,4505806 e-009	2,9103830 e-010	-1,6098056 e-009	2,9103830 e-010	-1,6098056 e-009	-6,2251111 e-009
7	f_1	-1,4901161 e-008	-3,6437996 e-008	-4,5656634 -e009	-3,6437996 e-008	-4,5656634 e-009	-2,6468989 e-008

У табл. 1 і 2 нульовий рядок містить нумерацію стовпців, а нульовий стовпець — рядків. У першому стовпці наведені параметри, що аналізуються: змінні і нев’язки системи рівнянь. У першому рядку стовпців 2–7 наведені значення змінного параметра компонента G_3. В інших рядках цих стовпців є результати рішення СЛАР (значення змінних) та обчислених нев’язок для зазначеного в першому рядку цього стовпця параметра компонента.

3.4. Аналіз результатів чисельного розрахунку, наведеного в табл. 1 і 2

У рядках 5–7 стовпця 2 табл. 1 та 2 наведено похибку (нев’язку) контрольного розрахунку СЛАР. Похибка не більше значення молодшого розряду мантиси результатів. При оцінці впливу різниці порядку значень параметрів компонентів на точність чисельного рішення СЛАР ця помилка не враховується.

У стовпцях 3–7 табл. 1 наведено результати чисельного розрахунку СЛАР (2) та нев’язки (похибки), обчислені за формулою (5), залежно від параметра компонента G_3, розміщеного в діагональних і недіагональних елементах матриці. Відповідно до нев’язок, наведених у стовпцях 3–6, вони збільшуються зі збільшенням значення параметра компонента G_3. При перевищенні нев’язок допустимого рівня точності чисельне рішення СЛАР прийнято вважати нестійким. З результатів, наведених у стовпці 7, випливає, що при значенні параметра компонента G_3=1,0e+8 рішення СЛАР (2) не існує. Оскільки в операції складання (віднімання) беруть участь елементи матриці, які містять параметр компонента G_3, можна припустити, що помилка округлення цієї операції є причина похибки і навіть відсутності чисельного рішення системи.

У стовпцях 3–7 табл. 2 наведено результати чисельного розрахунку СЛАР (4) та нев'язки (похибки), Похибки, обчислені за формулою (6), практично не залежать від значень параметра компонента G_3, розташованого лише у діагональному елементі матриці. Незважаючи на те, що в обчислювальному процесі рішення СЛАР (4) в операції додавання (віднімання) бере участь елемент матриці, що містить параметр компонента G_3, чисельне рішення СЛАР стійке у всьому діапазоні зміни параметра компонента G_3.

З наведеного вище аналізу слідує, що чисельне рішення системи рівнянь (2) залежить від значення параметра компонента G_3 і при фіксованому рівні точності рішення буде нестійким аж до відсутності рішення, у той час, як чисельне рішення системи (4) стійке навіть при матриці, близькій до виродження. Отримані результати суперечать загальноприйнятій думці про те, що при матриці, близькій до виродження, чисельний розв'язок системи завжди нестійкий.

Ці системи описують один і той ж електричний ланцюг і відрізняються один від одного тільки у виборі змінних системи. Так, у системі рівнянь (2) змінними обрані вузлові потенціали, в які не входить напруга компонента G_3. Система рівнянь (4) отримана з системи (2) шляхом заміни певним чином змінної вузлового потенціалу U_2 на напругу U_{G3} компонента G_3. Це означає, що помилка округлення операції складання (віднімання) сама безпосередньо не призводить до похибки обчислювального процесу, а лише створює умови для виконання невідомої операції, яка вносить похибку в обчислювальний процес.

З метою визначення чинника, що впливає на обчислювальний процес, буде проаналізовано алгоритм прямого ходу чисельного рішення системи методом Гауса. Аналіз обчислювального процесу буде виконано у загальному вигляді для СЛАР третього порядку.

Нижче наводиться необхідна інформація щодо чисельного рішення СЛАР методом Гауса для з'ясування причини, що викликає нестійкість розв'язання системи.

Як вихідна інформація розглядається система рівнянь виду

$$A\mathrm{x} = b\,..\;..\,, \tag{7}$$

де A — матриця коефіцієнтів системи має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a''_{33} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Вектор змінних

$$\mathrm{x} = \begin{vmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

і вектор зовнішніх впливів

$$b = \begin{vmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ b_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Алгоритм чисельного рішення системи складається з декількох етапів. Далі розглянутий тільки прямий хід методу Гауса.

На етапі прямого ходу методу Гауса виконується перетворення системи рівнянь (7) до виду

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1^1 \\ f_2^2 \\ f_3^3 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

В алгоритмі прямого ходу для виділення арифметичних операцій аргументи, в які входять елементи матриці, що містять компонент G_3, використовується таке представлення елементів матриці:

- $\mathbf{A}_{ij}^{k}$ — позитивний елемент матриці містить параметр компонента G_3, розташований в i-ому рядку, j-ому стовпці і k раз брав участь в операції додавання (віднімання);
- $\mathbf{A}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{k}}$ — негативний елемент матриці містить параметр компонента G_3;
- A_{ij}^{k} — копія елемента матриці, що містить параметр компонента G_3;
- a_{ij} — позитивний елемент матриці не містить параметр компонента G_3;
- $\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}$ — негативний елемент матриці;
- $\mathrm{C}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}$ — елемент для зберігання числа, що містить параметр компонента G_3;
- c_{ij} — елемент для зберігання числа, що не містить параметр компонента G_3.

Спочатку алгоритм розглядається для матриці СЛАР (2). Напруга компонента G_3 не входить у вектор змінних системи. Матриця містить 4 елементи, в які входить параметр компонента G_3. Значення елементів матриці, що містять параметр компонента G_3, розраховані для G_3=10e+6. Розрахована матриця наведена нижче.

$$A = \begin{vmatrix} 2.0 & -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 100002.0 & -1.0e+6 \\ 0.0 & -1.0e+6 & 100002.0 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Далі приводиться прямий хід чисельного рішення системи (2).

Перетворення першого рядка матриці виконується за формулами

$$a^1_{11}=1, \quad \mathbf{a^1_{12}}=\mathbf{a_{12}}/\, a_{11}, \quad b^1_1=b_1/\, a_{11}. \quad (13)$$

Обнуління першого стовпця виконується за формулами

$$c_{22} = \boldsymbol{a_{21}}\mathbf{a^1_{12}}, \quad A^2_{22}=A^1_{22} - c_{22}.- c_{23} = \mathbf{a_{21}}\ \mathbf{a^1_{13}}, \quad A^1_{\mathbf{23}}=\mathbf{A_{23}} - c_{23} \quad b^1_2= b_2 - a_{21}b_1. \quad (14)$$

Перетворення другого рядка виконується за формулами

$$a^2_{22}=1{,}0, \ \ b^1_2 =b^1_2/A^2_{22}, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{a}^2_{23}=\mathbf{A}^1_{23}/A^1_{22}\approx -1{,}0. \quad (16)$$

Обнуління другого стовпця виконується за формулами

$$C_{33}=\mathbf{A^1_{32}}\ \boldsymbol{a}^2_{23}\approx A^1_{\mathbf{32}}, \quad (17)$$

$$a_{33}=A^1_{33} - C_{33}. \quad (18)$$

Перетворення третього рядка виконується за формулами

$$a^2_{33}=1, \ b^2_3=b^2_3 / a^2_{33}\ . \quad (19)$$

З наведеного вище алгоритму випливає:

1. Оцінимо помилку округлення операції додавання (віднімання). Вона обчислюється в такий спосіб. В операції складання (віднімання) чисел із плаваючою комою число роз-

рядів мантис чисел, що беруть участь в операції, визначається значеннями чисел, тому помилку округлення числа розрядів n1 обчислюємо як

$$n1 = p1 - p2 = 6 - 0 = 6\,, \tag{20}$$

де $p1 = 6$ — порядок числа A_{ij}^{k}, а $p2 = 0$ — порядок числа a_{ij}. Кількість старших розрядів $n2$ числа a^{ij}, що беруть участь в операції, визначається за формулою

$$n2 = m - n1 = 8 - 6 = 2\,, \tag{21}$$

де m — кількість розрядів мантиси числа із плаваючою комою. Таким чином, за значення G_3=1.0e+6, тобто матриця, близька до виродження, лише 2 старших розряду числа a_{ij} беруть участь в операції віднімання. Незважаючи на це, помилка округлення арифметичної операції додавання (віднімання), формули (14), безпосередньо не вносить похибку в обчислювальний процес, а тільки створює умови для внесення цієї похибки в обчислювальний процес.

2. Похибку до обчислювального процесу вносить арифметична операція віднімання — формула (18). Аргументами операції є елементи. матриці, які містять параметр компонента G_3=10e^{+6}. У цьому випадку результат операції містить не більше двох старших десяткових значних розрядів з 8-розрядної мантиси числа. Це призводить до втрати точності розв'язання і тим самим до нестійкості розв’язання системи рівнянь. Слід зазначити, що таке, здавалося б, неймовірне поєднання аргументів в арифметичній операції є результат складання рівнянь, що описують електричний ланцюг. методом вузлових потенціалів.

Далі наводиться алгоритм матриці СЛАР (4). Напруга компонента G_3 входить у вектор змінних системи, а діагональний елемент матриці містить параметр компонента G_3. Значення цього елемента розраховано для G_3=1,0е+6. Розрахована матриця наведена нижче.

$$\begin{vmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 100002.0 & -2.0.0 \\ -1.0 & -2.0 & 4.0 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Перетворення першого рядка матриці виконується за формулами

$$a^1_{11}=1,\ \ \mathbf{a^1_{12}}= a_{12}/\,a_{11},\ \ \mathbf{a^1_{13}}= \mathbf{a_{13}}/\,a_{11},\ \ b^1_1= b_1/a_1 1. \tag{23}$$

Обнуління першого стовпця виконується за формулами

$$A^2_{22}=A^1_{22} - \boldsymbol{a_{21}}\, a^1_{12},\quad a^1_{23}=\mathbf{a_{23}} - \mathbf{a_{21}}\, \mathbf{a^1_{13}}\,,\quad b^1_2 = b_2 - a_{21}\, b^1_1, \tag{24}$$

$$a^1_{32}= a_{32} - \mathbf{a_{31}}\, a^1_{12},\quad a^2_{33}= a^1_{33} - \mathbf{a_{31}}\, \mathbf{a^1_{13}},\quad b^1_3 = b_3 - a_{31}\, b^1_1. \tag{25}$$

Перетворення другого рядка виконується за формулами

$$a^2_{22}=1/0,\ \ a^2_{23}=a^1_{23}/A^2_{22}, \tag{26}$$

$$b^1_2 = b^1_2/\,A^2_{22}. \tag{27}$$

Обнуління другого стовпця виконується за формулами

$$a^2_{33}=a^1_{33} - a^1_{32}\, a^2_{23}. \tag{28}$$

$$b^2_3= b^1_3 - a^1_{32}\, b^1_2. \tag{29}$$

Перетворення третього рядка виконується за формулами

$$a^3_{33}=1{,}0,\quad b^3_3 =b^2_3/a^2_{33}. \tag{30}$$

Як випливає з наведеного вище алгоритму, тільки в одній операції віднімання (формули (24) один аргумент містить параметр компонента G_3=1,0 е+6. Відсутня арифметична операція, яка вносить похибку в обчислювальний процес. Це результат того, що напруга компонента G_3=1,0 е+6 входить у вектор змінних, а параметр лише в діагональний елемент. Точність розв’язання системи рівнянь у межах помилки округлення арифметичних операцій, тобто стійкість чисельного розв’язання системи рівнянь у разі матраці близька до виродження.

Напруга компонента G_3, розташованого між вузлами 2 і 3, не є вузловим потенціалом, а це означає, що СЛАР (4) не може бути складена методом вузлових потенціалів.

4. Висновок

Лінійні системи рівнянь та їх надійне рішення є ключовою частиною практично всіх обчислювальних систем та при вирішенні багатьох інженерних завдань. В основному оцінка обумовленості матриці використовується для оцінки роздільної здатності лінійної системи, яка є важливою.

У цій роботі запропоновано застосовувати для оцінки роздільної здатності лінійної системи рівнянь, що описує фізичний об’єкт, поняття матриці, близької до виродження. Застосовано системний підхід до дослідження механізму взаємозв’язку матриці, близької до виродження, та розв’язності лінійної системи рівнянь. Суть системного підходу полягає в тому, що об’єктом дослідження є всі етапи моделювання фізичного об’єкта, а саме опис фізичного лінійного об’єкта, складання лінійної системи рівнянь, що описують об’єкт, та рішення складеної системи рівнянь.

Як модельний приклад обрано електричний ланцюг. При виборі модельного прикладу враховувалося те, що графічне уявлення електронного ланцюга задовольняє вимогам теорії графів. а для складання опису електричного кола існує розвинений математичний апарат теорії електричних кіл.

Отримано такі результати проведеного дослідження.

Встановлено, що поняттю матриці, близької до виродження, відповідає граф електричного ланцюга, близький до виродження. Вперше пропонується як індикатор матриці, близької до виродження, використовувати провідність двополюсного компонента, розташованого між вузлами графа. Чим більше значення провідності компонента індикатора по відношенню до значень провідності інших компонентів, тим ближче до виродження топологія електричного ланцюга, яка представлена графом, і, відповідно, матриці складеної системи рівнянь.

Встановлено, що є два варіанти входження напруги та провідності до системи рівнянь. Для цих варіантів виконано розрахунок залежності точності розв’язання системи рівнянь від провідності індикатора близькості до виродження матриці.

Отримано результати аналізу залежності точності чисельного розв'язання системи рівнянь, що описує електричний ланцюг, від провідності компонента індикатора близькості матриці до виродження:

• встановлено, що помилка округлення арифметичної операції додавання (віднімання) призводить до втрати точності чисельного розв'язання системи рівнянь. Вплив помилки на обчислювальний процес розв’язання системи виконується у два етапи. Вперше встановлено, що зв’язок між матрицею, близькою до виродження, та стійкістю розв’язання системи рівнянь існує у такому вигляді:

– якщо напруга компонента індикатора близькості матриці до виродження не входить до вектора змінних системи, то рішення системи залежить від близькості матриці до виродження;

– якщо напруга компонента індикатора близькості до виродження матриці входить у вектор змінних системи, то рішення системи не залежить від близькості матриці до виродження;

• вперше пропонується для отримання стійкого розв’язання системи рівнянь із матрицею, близькою до виродження, вибирати змінні таким чином. У вектор змінних вибирається напруга компонента, що має максимальну провідність серед компонентів, що не увійшли до вектора змінних.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Калиткин Н.Н., Юхно Л.Ф., Кузьмина Л.В. Количественный критерий обусловленности систем линейных алгебраических уравнений. *Математическое моделирование*. 2011. Т. 23, № 2. С. 3–26.

2. Волобоев В.П., Клименко В.П. Один способ корректной формулировки математической модели технической (физической) задачи. *Математичні машини і системи*. 2011. № 4. С. 95–106.

3. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія графів.

4. Сикорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. К.: Техника, 1970. 394 с.

Стаття надійшла до редакції 10.04.2024