



УДК 519.25

С.Л. КІВВА*, І.О. БРОВЧЕНКО*, О.І. ПИЛИПЕНКО*

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛЕНОЇ ЗА ВІКОМ МОДЕЛІ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ, ЗАСТОСУВАННЯ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ЕПІДЕМІЇ COVID-19 В УКРАЇНІ

*Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ, Україна

Анотація. У грудні 2019 року у місті Ухань, Китай, почався спалах важкого гострого респіраторного синдрому, відомого тепер як SARS-CoV-2. Незабаром вірус поширився по всьому світу, перетворившись на пандемію. З перших днів пандемії було запропоновано багато математичних моделей для прогнозування поширення цієї хвороби. З моменту спалаху було запроваджено різні заходи для стримування та контролю за поширенням вірусу, ці заходи здебільшого ґрунтувалися на результатах застосування даних моделей. Усі застосовані моделі для підвищення точності прогнозу вимагають визначення та уточнення параметрів моделі. SEIR-AGE дає змогу прогнозувати поширення вірусної інфекції COVID-19 з урахуванням вікових груп населення та їхньої просторової неоднорідності. SEIR-AGE є системою звичайних диференціальних рівнянь. Для чисельного розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь використовувався явний метод Рунге-Кутта 8-го порядку точності з оцінкою похибки 5-го порядку та з контролем вибору кроку інтегрування. Уточнення параметрів моделі відбувається на базі порівняння прогнозованих результатів зі спостережуваними шляхом розв'язання нелінійної задачі найменших квадратів з обмеженнями. Для розв'язання нелінійної задачі найменших квадратів з обмеженнями застосовувалася процедура DQED. Алгоритм базується на апроксимації нелінійних функцій за допомогою квадратично-тензорної моделі. Він використовує довірчу область, яка визначається паралелепіпедом, що містить поточні значення невідомих. Цільову функцію дозволяється збільшувати на проміжних кроках. Це збільшення дозволяється до тих пір, поки предиктор вказує на те, що в довірчій області існує новий набір найкращих значень. За необхідності передбачено повернення до поточних найкращих значень. Наведено чисельні приклади уточнення параметрів моделі SEIR-AGE.

Ключові слова: пандемія COVID-19, SEIR моделі, калібрування моделей, нелінійна задача найменших квадратів з обмеженнями.

Abstract. In December 2019, an outbreak of severe acute respiratory syndrome, now known as SARS-CoV-2, began in Wuhan, China. The virus soon spread around the world, becoming a pandemic. Since the early days of the pandemic, many mathematical models have been proposed to predict the spread of the disease. Since the outbreak, various measures have been introduced to contain and control the spread of the virus, and these measures have been largely based on the results of these models. All the applied models require model parameter refinement to improve forecast accuracy. SEIR-AGE allows for forecasting the spread of the COVID-19 virus infection, taking into account the age groups of the population and their spatial heterogeneity. SEIR-AGE is a system of ordinary differential equations. To numerically solve this system of ordinary differential equations, an explicit Runge-Kutta method of 8th order of accuracy with 5th order error estimation and control of the choice of integration step is used in the paper. The model parameters are refined by comparing the predicted results with the observed ones by solving a nonlinear least squares problem with constraints. The DQED procedure is used to solve the nonlinear least squares problem with constraints. The algorithm is based on the approximation of nonlinear functions using a quadratic tensor model. It uses a confidence region defined by a parallelepiped containing the current values of the unknowns. The objective function is allowed to increase at intermediate steps. This increase

is allowed as long as the predictor indicates that a new set of the best values exists in the confidence region. If necessary, it is possible to return to the current best values. Numerical examples of refining the parameters of the SEIR-AGE model are presented in the paper.

Keywords: COVID-19 pandemic, SEIR models, model calibration, nonlinear least squares problem with constraints.

DOI: 10.34121/1028-9763-2024-3-4-69-77

1. Вступ

COVID-19 — це інфекційне респіраторне захворювання, спричинене важким гострим респіраторним синдромом, викликаним коронавірусом (SARS-CoV-2). Вперше він був виявлений у місті Ухань, провінція Хубей, Китай, у грудні 2019 року і з тих пір поширився по всьому світу, спричиняючи велику кількість підтверджених смертей.

Всесвітня організація охорони здоров'я 20 січня 2020 року оголосила, що COVID-19 — це надзвичайна ситуація в галузі охорони здоров'я, яка має міжнародне значення, а 11 березня 2020 року вже назвала пандемією. Для обмеження поширення COVID-19 у різний час було застосовано кілька нефармацевтичних заходів, таких як фізичне дистанціювання, ізоляція, миття рук, розпорядження залишатися вдома, закриття шкіл і підприємств та обмеження на подорожі. Ці заходи здебільшого ґрунтувалися на епідеміологічних моделях, основною метою яких був контроль і моніторинг темпів базового та ефективного відтворення чисельності. Але значна кількість нових випадків COVID-19 продовжувала реєструватися по всьому світу.

При цьому розподіл зареєстрованих випадків COVID-19 різнився між віковими групами. Загалом інфекція рідко траплялася у дітей, а кількість випадків у дорослих зменшувалася з віком. Однак частка випадків госпіталізації, як правило, зростала з віком. Окрім інших чинників, зокрема заходів громадського здоров'я, ці відмінності можуть бути зумовлені різною кількістю контактів і активністю в залежності від віку, а також різною сприйнятливістю та тяжкістю захворювання залежно від віку. Для кращого розуміння динаміки передачі COVID-19 важливо оцінити вплив частоти контактів і моделей змішування людей у різних вікових групах.

Для вивчення динаміки передачі COVID-19 було застосовано кілька математичних моделей. Епідеміологічні популяційні моделі в основному були розширенням простої моделі SIR, в якій населення поділяється на групи: сприйнятливі, інфіковані та видужалі або померлі. Інфекційна група відповідає кількості осіб у популяції, які на даний момент можуть передавати хворобу. Частка сприйнятливих осіб, які стикаються з ними, інфікуються, в той час як інфіковані особи одужують або помирають із заданою швидкістю. Ці моделі використовуються для аналізу характеристик поширення інфекційних захворювань, таких як розподіл розмірів епідемій, прогнозування можливого перебігу майбутніх епідемій, а також для визначення ефективності можливих втручань та регуляцій. Вони особливо корисні, коли емпіричні дані на ранніх стадіях спалаху епідемії обмежені, а швидке реагування вимагає виділення масштабних ресурсів, щоб запобігти експоненціальному зростанню кількості випадків захворювання.

Більш складні моделі можуть включати просторову структуру і розділяти населення за віком, статтю або фізичним розташуванням. Ці моделі широко використовуються для моделювання COVID-19, включаючи такі ускладнення, як вікова або просторова структура та кілька інфекційних відділень для розмежування тяжкості симптомів. Цей просторово-структурований підхід може враховувати нерівномірні просторові фактори, такі як віковий розподіл та щільність населення, що дозволяє дослідникам прогнозувати регіони країни, які, ймовірно, зазнають найбільшого впливу, або моделювати різні регіональні втручання.

Багато з цих моделей припускають однорідне змішування в популяції, використовуючи однакову частоту контактів і схему змішування для всіх. Ці типи моделей можуть допомогти відповісти на широкі питання на рівні популяції, але не підходять для розумін-

ня вікової динаміки. Віково-структуровані моделі також використовувалися для вивчення COVID-19, зокрема впливу соціального дистанціювання на його поширення, ефективності різних стратегій вакцинації, а також наслідків колективного імунітету та повторного відкриття. Хоча ці моделі враховують неоднорідність рівня контактів і моделей змішування за віковими групами, вони припускають фіксований рівень контактів для кожної вікової групи протягом всієї епідемії. Це може бути некоректно, оскільки поведінкові обмеження, такі як фізичне дистанціювання, самоізоляція, розпорядження залишатися вдома та обмеження на пересування, з часом змінюють рівень контактів та активності, і ці впливи можуть відрізнятися в різних вікових групах. Для того, щоб подолати ці обмеження, необхідно включити в підхід до моделювання передачі інфекції постійні популяційні вимірювання рівня контактів за віковими групами.

Варто зазначити, що точність прогнозу залежить від правильно заданих параметрів моделі. На початку епідемії через недостатність даних спостережень за розвитком ситуації було дуже важко визначити параметри застосовуваної моделі. Тому калібрування таких моделей за даними спостережень є важливим етапом, яке ускладнюється зашумленим характером даних і невизначеністю в оцінці параметрів.

Метою статті є уточнення параметрів моделі SEIR-AGE для прогнозування поширення інфекції COVID-19 в Україні з урахуванням різних вікових груп. Для уточнення параметрів моделі розв'язується задача нелінійного методу найменших квадратів з обмеженнями. Для розв'язання цієї нелінійної оптимізаційної задачі застосовується процедура DQED, що базується на апроксимації нелінійних функцій за допомогою квадратично-тензорної моделі.

2. Модель поширення COVID-19 серед вікових груп населення SEIR-AGE

Для прогнозування поширення COVID-19 серед населення з урахуванням різних вікових груп застосовувалася модель SEIR-AGE [3].

У моделі кожна вікова група поділяється на такі підгрупи: S — схильні до ризику зараження, E — що були в контакті з носіями інфекції (до закінчення періоду інкубації), I — інфіковані. Передбачається, що лише інфіковані можуть передавати інфекцію. Кожна підгрупа I зі свого боку поділяється на:

- R_A — безсимптомні носії інфекції, що становлять p_A частину від I , одужують через час T_{inf} , не виявляючи жодних симптомів захворювання;
- R_M — група з легкими симптомами тих, хто одужає і складає p_M частину від I ;
- решта $p_S + p_F$ вимагатиме госпіталізації. З них p_S частина після госпіталізації одужає (R_S), а частина p_F — помре (D).

Процес протікання розповсюдження та протікання захворювання описується такою системою рівнянь:

$$\dot{S}^i = -\beta(t)S^i \sum_{k=1}^{K_2} I_k^j \sum_{j=1}^{N_{age}} \frac{c_{ij}}{N^j}, \quad (1)$$

$$\dot{E}_1^i = \beta(t)S^i \sum_{k=1}^{K_2} I_k^j \sum_{j=1}^{N_{age}} \frac{c_{ij}}{N^j} - \frac{K_1}{T_{inc}^i} E_1^i, \quad \dot{E}_m^i = \frac{K_1}{T_{inc}^i} (E_{m-1}^i - E_m^i), \quad m = \overline{2, \dots, K_1}, \quad (2)$$

$$\dot{I}_1^i = \frac{K_1}{T_{inc}^i} E_{K_1}^i - \frac{K_2}{T_{inf}^i} I_1^i, \quad \dot{I}_m^i = \frac{K_2}{T_{inf}^i} (I_{m-1}^i - I_m^i), \quad m = \overline{2, \dots, K_2}, \quad (3)$$

$$\dot{I}_{S,1}^i = p_S^i \frac{K_2}{T_{inf}^i} I_{K_2}^i - \frac{K_3}{T_{sev}^i} I_{S,1}^i, \quad \dot{I}_{S,m}^i = \frac{K_3}{T_{sev}^i} (I_{S,m-1}^i - I_{S,m}^i), \quad m = \overline{2, \dots, K_3}, \quad (4)$$

$$\dot{R}_A^i = p_A^i \frac{K_2}{T_{inf}^i} I_{K_2}^i, \quad \dot{R}_M^i = p_M^i \frac{K_2}{T_{inf}^i} I_{K_2}^i, \quad \dot{R}_S^i = \frac{K_3}{T_{sev}^i} I_{S,K_3}^i, \quad \dot{D}_S^i = \frac{K_4}{T_{death}^i} I_{F,K_4}^i, \quad (5)$$

де $i=1, \dots, N_{age}$ — індекс вікової групи; N_{age} — кількість вікових груп; $C = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{N_{age}}) = \{c_{ij}\}$ — квадратна матриця контактів вікових груп між собою, яка складається з векторів-стовпчиків \bar{c}_i ; T_{inc} — інкубаційний період; T_{inf} — інфекційний період; T_{sev} — період протікання захворювання у важкій формі; T_{death} — період часу до фатального результату.

Вектор величин x , що складається з \bar{c}_i , β , T_{inc}^i , T_{inf}^i , T_{sev}^i , T_{death}^i , p_S^i , p_F^i і p_A^i , розглядається як вектор параметрів моделі, які потребують уточнення. Для їх уточнення використовуватимемо метод нелінійних найменших квадратів із функціоналом якості у вигляді

$$\mathfrak{J}(x^{opt}) = \sum_{k=1}^{n^{obs}} \sum_{i=1}^{N_{age}} \sum_{j=1}^M \gamma_{kj}^i (f_k^i(t_j, Y) - f_k^{obs,i}(t_j))^2 \quad (6)$$

при обмеженнях

$$\frac{dY(t)}{dt} = g(t, x(t, x^{opt}), Y(t)), \quad (7)$$

$$Y(0) = Y^0, \quad (8)$$

$$\alpha \leq x^{opt} \leq \beta, \quad (9)$$

$$b_{min} \leq Ax \leq b_{max}, \quad (10)$$

де $Y \in R^N$ — вектор головних змінних вихідної задачі, що складається з S^i , E_j^i , I_j^i , $I_{S,j}^i$, $I_{F,j}^i$, R_A^i , R_M^i , R_S^i та D^i ; $x \in R^{N_{par}}$ — вектор параметрів задачі; $f_k^{obs,i}$ і f_k^i — спостережувані й обчислені стани системи для кожної вікової групи; γ — вагова функція; $x^{opt} \in R^{N_{opt}}$ — вектор параметрів, що уточнюються. Система рівнянь (7) — це векторний запис рівнянь (1)–(5). Нерівності (9)–(10) описують обмеження як на параметри моделі, так і на їхню лінійну комбінацію. Може уточнюватися не весь вектор параметрів, а тільки його деяка частина.

Для чисельного розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь (1)–(5) використовувався явний метод Рунге-Кутта 8-го порядку точності Dormand&Prince 8(5,3) [1] з оцінкою похибки 5-го порядку і з контролем вибору кроку інтегрування.

3. Алгоритм уточнення параметрів моделі SEIR-AGE

Задача (6)–(10) є окремим випадком загальної нелінійної задачі найменших квадратів

$$\min \sum_{i=1}^m f_i(x)^2 \quad (11)$$

за умови

$$g_L \leq g(x) \leq g_U, \quad (12)$$

$$x_L \leq x \leq x_U, \quad (13)$$

де $x \in R^n$ — змінні оптимізації (можливо, з нижньою та верхньою границями, $x_L \in (R \cup \{-\infty\})^n$ та $x_U \in (R \cup \{\infty\})^n$ при $x_L \leq x_U$, $f_i: R^n \rightarrow R$ — цільова функція, а $g: R^n \rightarrow R^k$ — загальні нелінійні обмеження. Функції $f_i(x)$ та $g(x)$ можуть бути лінійними або нелінійними, опуклими або неопуклими. Функції обмежень, $g(x)$, мають нижню та верхню межі, $g_L \in (R \cup \{-\infty\})^k$ та $g_U \in (R \cup \{\infty\})^k$, причому $g_L \leq g_U$. Зауважимо, що обмеження рівності виду $g_i(x) = \bar{g}_i$ можна задати, поклавши $g_{L,i} = g_{U,i} = \bar{g}_i$.

Для оптимізаційної задачі (7)–(11) застосовується алгоритм DQED [2] розв'язання нелінійної задачі найменших квадратів із простими чи лінійними обмеженнями на змінні. Алгоритм базується на апроксимації нелінійних функцій за допомогою квадратично-тензорної моделі, запропонованої Шнабелем і Франком [3]. Він використовує довірчу область, яка визначається паралелепіпедом, що містить поточні значення невідомих. Цільову функцію (евклідову довжину функцій) дозволяється збільшувати на проміжних кроках. Це

збільшення дозволяється до тих пір, поки наш предиктор вказує на те, що в довірчій області існує новий набір найкращих значень. За необхідності передбачено повернення до поточних найкращих значень. Обчислення вимагають використовувати алгоритм розв'язку нелінійного методу найменших квадратів з обмеженнями. Для цього використовується спрощена версія алгоритму. У нинішньому вигляді алгоритм ефективний для задач із лінійними обмеженнями та щільними матрицями Якобіана.

Нехай $f_i(x)$ — диференційовне відображення прямокутної області $T = \{x | x_{L,j} \leq x_j \leq x_{U,j}\}$ з R^n у R^m , а $g(x)$ — диференційовне відображення T у R^k . Знайдемо деяке $\hat{x} \in T$ таке, що $\|\bar{f}(x)\|^2$ має локальний мінімум $x = \hat{x}$ при обмеженнях $g_L \leq g(x) \leq g_U$.

Будемо припускати, що функції $f_i(x)$ та $g(x)$ визначені та диференційовні для кожного $x \in T$. Задачі, де $f_i(x)$ визначена лише при $x \in T$ та $g_L \leq g(x) \leq g_U$, не розглядаються. Розв'язок x буде задовольняти обмеженням на $g(x)$ (якщо це можливо), але $f_i(x)$ може бути оцінена у довільній точці x .

Базова ітерація полягає у генеруванні послідовності точок $x_0, x_1, \dots, x_p, \dots$. Ці точки отримуються шляхом розв'язування послідовності квадратично-тензорної моделі для методу найменших квадратів.

У квадратично-тензорній моделі потрібно знайти t , при якому мінімізується евклідова норма функції

$$m(t) = -f(x_p) + J_p t + 1/2 \sum_{j=1}^q a_j (t^T \nabla_j x_p)^2$$

за умови лінійних обмежень $g_p - g_U \leq E_p t \leq g_p - g_L$ та простих обмежень $x_l \in T \cap S, l = 0, \dots, p + 1$, де S — довірча область. (Алгоритм у його теперішньому вигляді працює адекватно лише тоді, коли обмеження є лінійними: $g(x) = Ex$, де E є дійсною матрицею розміром k на n).

Розв'язок $t = \hat{t}$ цієї обмеженої задачі найменших квадратів, близький до поточного x_p , дає такий член послідовності за допомогою оновлення, $x_{p+1} = x_p - \hat{t}$. Зауважимо, що \hat{t} може не бути унікальним. Наведемо короткий опис обчислювального алгоритму.

1. Ініціалізуємо змінні, структури даних та прирівнюємо до нуля попередній крок.

2. Початок циклу:

2.1. Обчислити $f(x_p), g_p, J_p$ та E_p .

2.2. Встановити наступний крок або повернутися до попереднього найкращого значення.

2.3. Перевірка на збіжність. Можливо, вихід із циклу.

2.4. Оцінити параметри квадратичної моделі.

2.5. Розв'язати обмежену лінійну модель-задачу.

2.6. обмежену квадратичну модель-задачу.

2.7. Вибрати крок зміни параметрів лінійної або квадратичної моделі-задачі.

2.8. Оновити поле довірчої області.

3. Кінець циклу.

4. Числові результати уточнення параметрів моделі SEIR-AGE

У цьому розділі наведено кілька прикладів уточнення параметрів моделі SEIR-AGE.

Приклад 1. Відомі щоденні дані щодо кількості хворих, одужалих і померлих без поділу на вікові групи, показані на рис. 1. Припускаючи, що всі параметри, крім $\beta(t)$, постійні в часі, потрібно їх уточнити на проміжку від 1 до 700 діб.

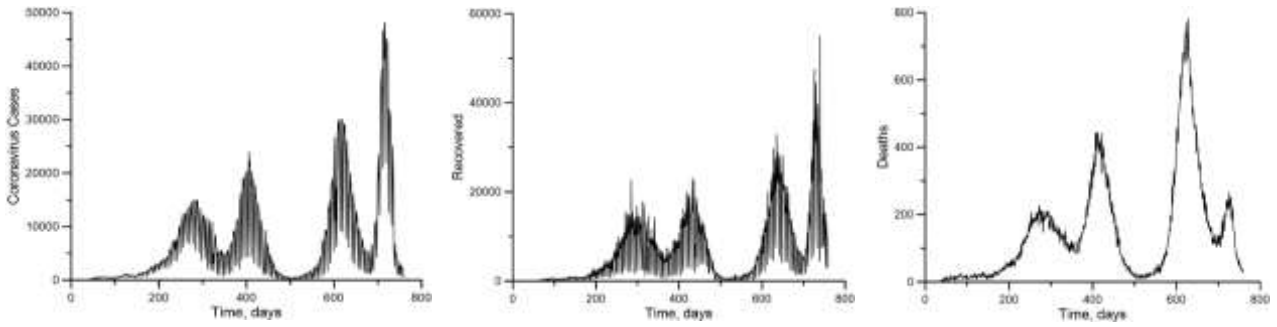


Рисунок 1 — Вихідні дані щодо кількості хворих, тих, хто одужав, і померлих згідно з офіційними статистичними даними для України [5]

Результати моделювання хвиль COVID-19 впродовж 700 днів за допомогою оригінальної моделі SEIR-AGE та моделі з уточненими параметрами показано на рис. 2. Під оригінальною моделлю ми розуміємо математичну модель, описану в [3]. Значення уточнених параметрів моделі наведено в табл. 1.

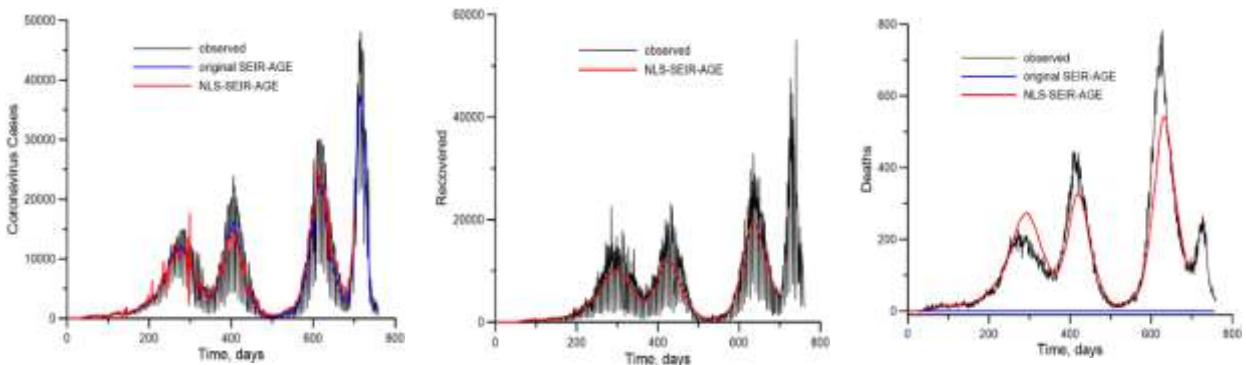


Рисунок 2 — Порівняння кількості осіб, які захворіли, одужали та померли, з кількістю осіб, розрахованою при постійних значеннях параметрів моделі

Таблиця 1 — Оптимальні значення параметрів моделі за умови їх постійності для різних хвиль захворюваності

T_{inc}	T_{inf}	T_{sev}	T_{death}	P_A	P_S	P_F
3,9241	7,6478	12,341	5,7633	2,094e-3	9,719e-1	2,517e-2

Приклад 2. Як і в попередньому випадку, розглядатимемо проходження COVID-19 захворювання без виділення вікових груп. Будемо вважати, що у кожній хвилі захворювання параметри моделі постійні і потрібно їх уточнити для відрізка часу 1–760 діб.

Порівняння результатів моделювання з реальними показниками показано на рис. 3. Параметри моделі наведені в табл. 2.

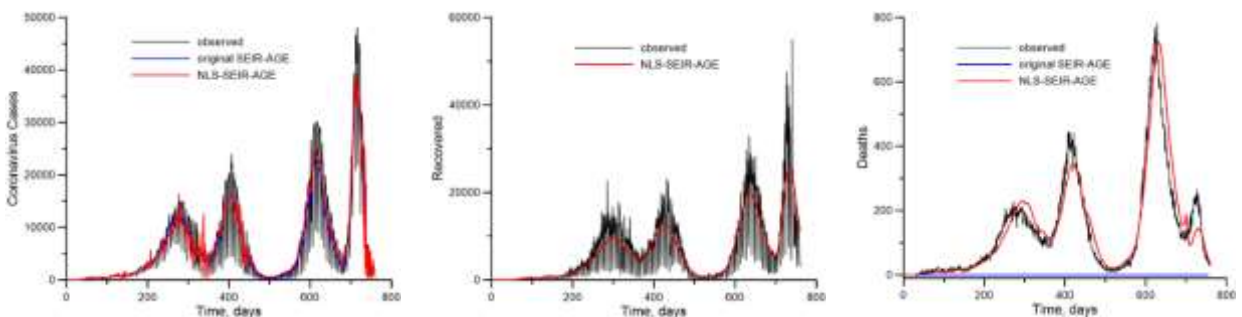


Рисунок 3 — Порівняння кількості осіб, які захворіли, одужали та померли, з кількістю осіб, розрахованою при постійних значеннях параметрів моделі для кожної хвилі захворюваності

Таблиця 2 — Оптимальні значення параметрів моделі за умови їх постійності для кожної з хвиль захворюваності

Time, days	T_{inc}	T_{inf}	T_{sev}	T_{death}	p_A	p_S	p_F
1–300	3,9912	7,7246	13,197	5,5518	1,6554e-4	9,6551e-1	2,1527e-2
300–450	3,9956	7,6658	13,147	5,7307	1,5765e-4	9,6643e-1	2,4040e-2
450–700	4,0121	7,2281	12,108	5,7279	7,9140e-5	9,4782e-1	3,1661e-2
700–760	3,5426	7,6909	12,869	5,9503	2,1633e-3	9,8038e-1	4,8634e-3

Приклад 3. Про моделюємо проходження COVID-19 захворювання в першу хвилю з урахуванням вікових груп. У цьому разі у функціоналі (6) модельовані показники порівнюються не з загальними реальними, а з показниками за кожною віковою групою. Для кожної вікової групи показники вважаються постійними. Величини K_1 , K_2 , K_3 і K_4 вважалися рівними 1. Коефіцієнти матриці обмінів також уточнювалися.

Результати моделювання для окремих вікових груп наведено на рис. 4–7. Результати калібрування числових параметрів моделі для різних вікових груп наведено в табл. 3.

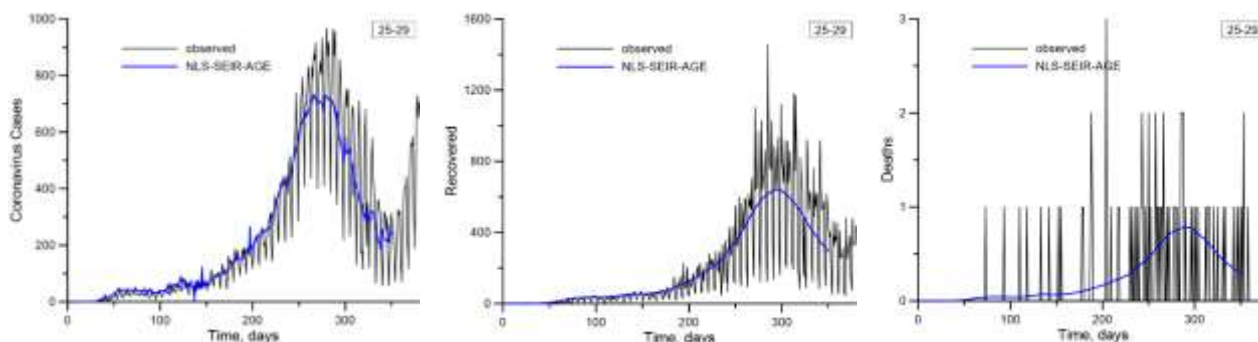


Рисунок 4 — Порівняння кількості людей, які захворіли, одужали та померли, з показниками, розрахованими для вікової групи 25–29 років

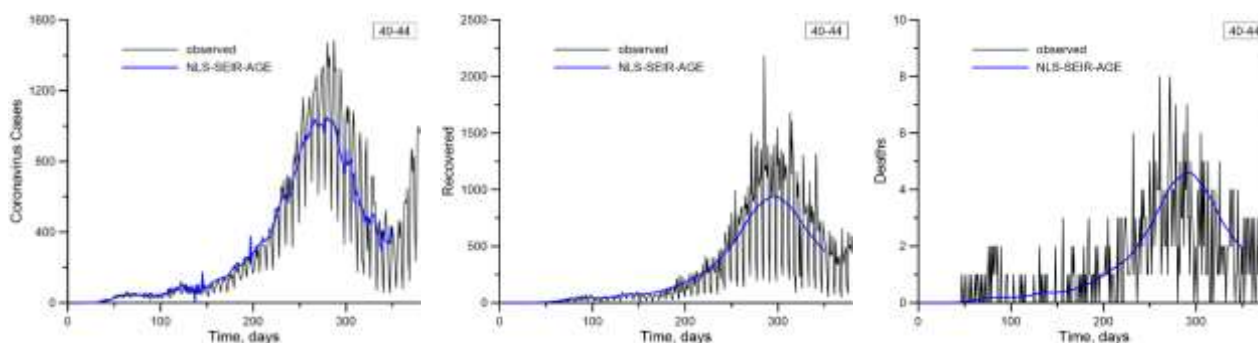


Рисунок 5 — Порівняння кількості людей, які захворіли, одужали та померли, з показниками, розрахованими для вікової групи 40–44 роки

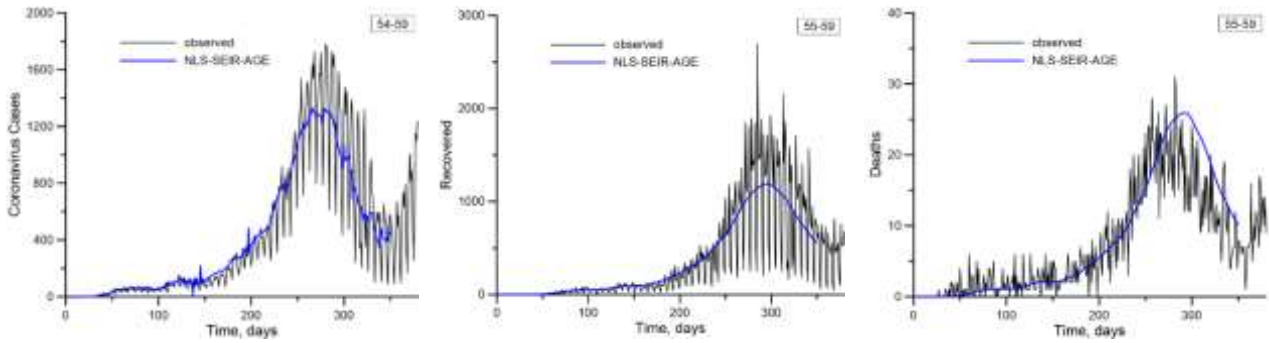


Рисунок 6 — Порівняння кількості людей, які захворіли, одужали та померли, з показниками, розрахованими для вікової групи 55–59 років

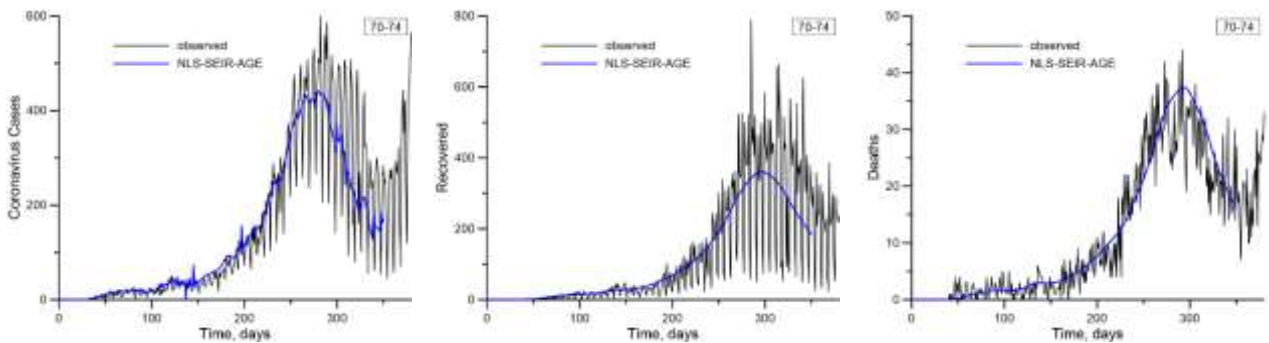


Рисунок 7 — Порівняння кількості людей, які захворіли, одужали та померли, з показниками, розрахованими для вікової групи 70–74 роки

Таблиця 3 — Оптимальні значення параметрів моделі за умови їхньої постійності для кожної з вікових груп

Age Group	T_{inc}	T_{inf}	T_{sev}	T_{death}	P_A	P_S	P_F
0–4	3,0671	6,5438	13,4588	5,5986	1,0000e-5	9,7430e-1	1,0000e-3
5–9	3,4421	7,1794	11,0293	5,8540	4,3068e-2	9,3371e-1	9,5546e-4
10–14	3,8811	7,4092	12,9639	6,9537	8,2210e-3	9,8912e-1	1,0000e-3
15–19	3,0414	7,8961	11,9965	5,6734	2,7485e-2	9,6272e-1	9,8238e-4
20–24	4,0365	6,8123	10,0002	7,1293	9,8519e-2	8,7078e-1	9,4047e-4
25–29	2,7469	7,2423	13,1645	6,5265	4,8380e-2	9,4830e-1	1,1160e-3
30–34	3,9754	7,0316	8,4855	4,6148	1,0000e-5	9,1418e-1	1,6010e-3
35–39	2,9025	8,7794	12,8386	5,3227	2,9345e-2	9,5476e-1	2,4845e-3
40–44	2,9807	8,6234	11,1288	5,1879	2,3057e-2	9,6797e-1	4,5890e-3
45–49	3,3774	7,5552	11,9495	7,0070	5,6220e-3	9,6915e-1	7,5300e-3
50–54	4,3185	8,2697	7,9621	5,6234	5,9000e-5	9,5187e-1	1,1836e-2
55–59	3,0558	7,7791	12,5161	6,4512	3,8278e-2	9,1468e-1	1,9299e-2
60–64	3,0523	8,5459	12,4319	5,9800	1,5815e-2	9,4179e-1	3,3267e-2
65–69	4,3184	6,7224	15,8884	6,8490	5,4870e-3	9,2277e-1	5,3647e-2
70–74	4,6180	6,9452	12,5025	5,8766	3,2087e-2	8,7077e-1	8,6828e-2
75–79	3,2039	7,7319	12,2607	5,1704	1,1174e-2	8,3741e-1	1,3479e-1
80–84	3,1556	7,8512	13,1343	5,9076	1,0000e-5	7,7253e-1	1,8196e-1
85–89	3,5529	7,2920	14,4693	6,9322	2,4902e-5	8,4224e-1	1,3661e-1
90-	3,1772	8,5120	14,9513	6,1806	4,1970e-3	9,2266e-1	4,7502e-2
NA	3,8979	8,5148	13,8571	5,8970	4,8370e-3	8,5517e-1	1,8304e-2

5. Висновки

Для уточнення параметрів моделі SEIR-AGE застосовувався алгоритм DQED. Алгоритм DQED призначений для пошуку локального мінімуму задачі нелінійних найменших квадратів із лінійними обмеженнями. У нелінійній задачі найменших квадратів може бути кілька локальних мінімумів і алгоритм DQED буде сходиться до одного з них, залежно від обраного початкового наближення.

Алгоритм DQED є представником градієнтних методів. Для збіжності цих методів необхідно знати напрямок спуску і величину кроку. Напрямок спуску визначається якобіаном, який у нашому випадку обчислюється наближено. Чим більша розмірність задачі (чим більшу кількість параметрів необхідно уточнювати), тим більш неточно визначаються напрямок спуску і величина кроку і збільшується час на обчислення якобіана. Показано здатність алгоритму підібрати параметри та відтворити динаміку перебігу COVID-19 на статистичних даних для України з урахуванням неоднорідного розподілу серед вікових груп.

Алгоритм DQED є ресурсозатратним, тобто він потребує значних обчислювальних ресурсів. Тому бажаним є його застосування для уточнення невеликої кількості параметрів моделі SEIR-AGE і на невеликому інтервалі часу.

Робота моделі порівнювалася з простішою моделлю SEIR[5], що дає змогу швидко та ефективно моделювати та прогнозувати основні епідемічні параметри, але не має вікового розподілу та можливості аналізувати обмежуючі заходи через використання неоднорідних матриць контактів. Запропонований метод може бути використано в багатьох моделях різної складності поширення інфекційних захворювань.

Робота виконана за підтримки Національного Фонду Досліджень України, Грант 2021.01/0311.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. 2nd Edition. Springer Series In Computational Mathematics. 1993. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>.
2. Schnabel R.B., Frank P.D. Tensor methods for nonlinear equations. *SIAM J Numer. Anal.* 1984. Vol. 21, N 5 (Oct. 1984). P. 815–843. DOI: <https://doi.org/10.1137/0721054>.
3. Hanson R.J., Krogh F.T. A quadratic-tensor model algorithm for nonlinear least-squares problems with linear constraints. *ACM Transactions on Mathematical Software.* 1992. Vol. 18 (2). P. 115–133. DOI: <https://doi.org/10.1145/146847.146857>.
4. Kyrychko Y.N., Blyuss K.B., Brovchenko I.O. Mathematical modelling of the dynamics and containment of COVID-19 in Ukraine. *Sci Rep.* 2020. N 10. P. 19662. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-020-76710-1>.
5. Бровченко І. Розробка математичної моделі поширення епідемії COVID-19 в Україні. *Світогляд.* 2020. № 2 (82). С. 2–14.
6. Brovchenko I. Datasets for COVID-19 data in Ukraine for period 2020–2022. Zenodo. 2024. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13334377>.

Стаття надійшла до редакції 26.08.2024